

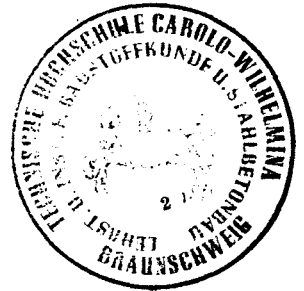
30-0168/001

INSTITUT FÜR BAUSTOFFKUNDE UND STAHLBETONBAU

DER TECHNISCHEN UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG

DIREKTOREN: PROF. DR.-ING. K. KORDINA – PROF. DR.-ING. G. REHM

~~VI 148~~



Theoretische und experimentelle Untersuchungen an
Stahlbetonrechteckbalken unter kombinierter Bean-
spruchung aus Torsion, Biegemoment und Querkraft.

Prof. Dr.-Ing. S.K. Ojha
o. Prof. Dr.-Ing. K. Kordina

Braunschweig, im August 1973

Postsendungen:
33 Braunschweig, Beethovenstraße 52
Erfüllungsort und Gerichtsstand Braunschweig

Fernsprecher: (0531) 391 2281

Fernschreiber: 952/98 ibstb d

Zur Vermeidung von Verzögerungen wird dringend gebeten, Zuschriften nur an das Institut zu richten, nicht aber
an einzelne Mitarbeiter.

DK 624.012.45: 624.072.2

Inhaltsverzeichnis

Seite

Bezeichnungen	4
1. Einleitung	6
2. Geschichtliches	8
2.1 Reine Torsion	8
2.1.1 Unbewehrter Beton	8
2.1.2 Stahlbeton	9
2.1.3 Spannbeton	12
2.2 Kombinierte Torsion	13
2.2.1 Stahlbeton	13
2.2.2 Spannbeton	15
3. Über die wichtigsten Torsionstheorien	16
3.1 Klassische Theorien	16
3.2 Fachwerkanalogie	18
3.3 Theorie der schiefen Bruchfläche	23
3.3.1 Lessig	24
3.3.2 Yudin	28
3.3.3 Collins et al.	29
3.3.4 Goode und Helmy	29
3.3.5 Hsu	30
3.3.6 Kuyt	32
3.3.7 McMullen und Warwaruk	33
3.4 Empirische Formeln	35
3.4.1 Gleichmäßig verteilte Last	39
3.5 Gegenüberstellung der wichtigen Torsionstheorien	40
3.6 Die gegenwärtigen Bestimmungen für die Bemessung auf kombinierte Torsion	41
3.6.1 DIN 1045	41
3.6.1.1 Bemessung für Querkraft	41
3.6.1.2 Bemessung für Torsion und für Torsion + Querkraft	42
3.6.2 CEB/FIP-Richtlinien	43
3.6.2.1 Bemessung auf Querkraft	44
3.6.2.2 Bemessung auf Torsion	45
3.6.2.3 Bemessung auf Torsion und Querkraft	46
3.6.3 UdSSR-Stahlbetonbestimmungen	48
3.6.3.1 Festigkeitsberechnung auf Querkraft	48
3.6.3.2 Festigkeitsberechnung auf Torsion und Torsion + Biegung (mit Querkraft)	48
3.6.4 Amerikanische Bestimmungen ACI 318-71	50
3.6.4.1 Festigkeitsberechnung auf Querkraft	50
3.6.4.2 Festigkeitsberechnung auf Torsion und Querkraft	50

	Seite
3.6.5 Kritische Bemerkungen zu den gegenwärtigen Bestimmungen . .	52
3.6.5.1 DIN 1045	52
3.6.5.2 CEB/FIP-Richtlinien	55
3.6.5.3 UdSSR-Bestimmungen	56
3.6.5.4 Amerikanische Bestimmungen	56
4. Über die für die Torsionstragfähigkeit wichtigen Einflußfaktoren und über die Aufstellung einer empirischen Formel	57
4.1 Betonfestigkeit	57
4.2 Längsbewehrung	58
4.3 Querbewehrung	59
4.4 Torsion-Biegemoment-Verhältnis	61
4.5 Torsionsquerkraftverhältnis	62
4.6 Querschnittsform	65
4.7 Empirische Formel zur Tragfähigkeitsberechnung	66
5. Über die Verformung und die Torsionssteifigkeit	68
5.1 Ungerissener Zustand	70
5.2 Gerissener Zustand	71
5.2.1 Lampert und Thürlimann	72
5.2.2 Rahlwes	74
5.2.3 Karlssen	75
5.2.4 Collins et al.	76
5.2.5 Bay	79
5.3 Gegenüberstellung der Steifigkeitsberechnungsformeln	81
5.3.1 Betonfestigkeit	82
5.3.2 Längsbewehrung	82
5.3.3 Bügelbewehrung	83
5.4 Berechnung der Torsionssteifigkeit rechteckiger Querschnitte bei kombinierter Torsion	83
6. Versuchsprogramm	87
6.1 Einleitung	87
6.2 Versuchsaufbau	88
7. Versuchskörper	89
7.1 Beschreibung der Versuchsbalken	89
7.2 Baustoffe	91
7.2.1 Beton	91
7.2.2 Betonstahl	94
7.3 Herstellung der Versuchsbalken	94
7.4 Meßtechnik	95
7.4.1 Dehnungsmessungen	95
7.4.2 Durchbiegungsmessung	97
7.4.3 Verdrehungsmessung	97

	Seite
8. Versuchsdurchführung	99
9. Versuchsergebnisse	102
9.1 Bruchlasten	102
9.2 Rißbildung und Bruchverhalten der Balken	104
9.3 Stahlspannungen	107
9.3.1 Stahldehnungen der Querbewehrung	107
9.3.2 Stahldehnungen der Längsbewehrung	108
9.4 Betondehnungen	110
9.5 Verformungen	111
9.5.1 Verdrehung	111
9.5.2 Torsionssteifigkeit	112
9.5.3 Durchbiegung	114
10. Zusammenfassung	115
Summary	120
11. Literaturverzeichnis	125
Tabellen 1 - 10	
Bilder	

Bezeichnungen

b, d	Breite bzw. Höhe des Rechteckquerschnittes
b _f , b _o	Flansch- bzw. Stegbreite bei T- und L-Querschnitten
h	Nutzhöhe des Balkens
b ₁ , d ₁	Breite bzw. Höhe des vom Bügel umschlossenen Betonkerns
T, M, Q	Torsionsmoment, Biegemoment bzw. Querkraft
T _o , M _o , Q _o	reine Torsions, reine Biege- bzw. reine Schubtragfähigkeit
$\phi = \frac{T}{M}$	Torsionsmoment zu Biegemoment-Verhältnis
x, y	kleine bzw. große Abmessung der rechteckigen Bestandteile des Querschnittes
F _{eL}	Gesamtquerschnittsfläche der Längsbewehrung
F _{eO}	Querschnittsfläche der Längseisen an der Balkenoberseite
F _{eU}	Querschnittsfläche der Längseisen an der Balkenunterseite
F _{eS}	Querschnittsfläche der Längseisen an jeder Balkenseite
\overline{F}_{eO}	Querschnittsfläche jedes oberen Längseckeisens (bei Lampert-Thürlimann)
\overline{F}_{eU}	Querschnittsfläche jedes unteren Längseckeisens (")
F _{ss}	Querschnittsfläche des Bügelstabes
s	Bügelabstand
a ₁ , a ₂ , a _o	Abstand des Schwerpunktes des Längsstabes von der nächsten unteren, seitlichen bzw. oberen Balkenseite
a ₃ , a ₄ , a ₅	Abstand der Bügelmittellinie von der nächsten unteren, seitlichen bzw. oberen Balkenseite
$\mu_L = \frac{F_{eL}}{\Sigma(xy)}$	Längsbewehrungsgrad
$\mu_{Bü} = \frac{2 F_{ss} (b_1 + d_1)}{s \cdot \Sigma(xy)}$	Bügelbewehrungsgrad
a	Schubspannweite
β _p	Betonprismendruckfestigkeit (= Zylinderdruckfestigkeit)
β _z , β _{bz}	Reine Zug- bzw. Biegezugfestigkeit des Betons
β _{eso}	Streckgrenze der oberen Längseisen
β _{esu}	Streckgrenze der unteren Längseisen
β _{ess}	Streckgrenze der seitlichen Längseisen
β _{ss}	Streckgrenze der Bügelbewehrung
E _e , E _b	Elastischer Modul des Stahls bzw. des Betons
G	Schubmodul
K _I , K _{II}	Torsionskonstante (Torsionsträgheitsmoment) im Zustand I bzw. im Zustand II

σ_{eu}	Stahlspannung in der unteren Bewehrung
σ_{eo}	Stahlspannung in der oberen Bewehrung
σ_s	Stahlspannung in der Bügelbewehrung
σ_{bm}	Mittlere Druckspannung in der Betondruckzone (bei Goode und Helmy)
S	Schubfluß
α	Rißneigung
x	Höhe der Betondruckzone
$k_a \cdot x$	Abstand des Schwerpunktes der Druckkraft vom nächsten Querschnittsrand
$m_c = \frac{F_{ss} \beta_{ss} b_l}{F_{eu} \beta_{esu} s}$	(bei Collins)
C	Projizierte Länge der Druckzone auf die Balkenlängsachse
$\theta \cdot c$	Projizierte Länge des der Druckzone gegenüberliegenden Risses auf die Balkenlängsachse
ϑ	Torsionsverdrehung pro Balkenlängeneinheit
ϵ	Dehnung

Weitere Bezeichnungen - wo nötig - im Text eingeführt.

1. Einleitung

Bei der Bemessung der Stahlbetonbauteile wurde in der Vergangenheit auf Torsion kaum achtgegeben; man nahm meistens an, die Torsionswirkung sei relativ unwichtig und könne durch die bei der Biegebemessung häufig vorhandenen Sicherheitsfaktoren abgedeckt werden. Bis vor kurzem gab es tatsächlich kaum etwas Bedeutendes in irgendeiner Stahlbetonbestimmung. Man errechnete die "Torsionsspannung" und verglich sie mit den angegebenen "zulässigen" Werten, die vorwiegend als abhängig von der Betongüte angesehen wurden; der Einfluß anderer, noch wichtigerer Faktoren blieb jedoch unbeachtet. Sollten die "zugelassenen" Werte überschritten werden, so bedarf dies der Bemessung der Torsionsbewehrung. Zu diesem Zweck wurden dann halb theoretisch - halb empirisch aufgestellte Formeln vorgeschlagen. Von zusammengesetzter Einwirkung der Torsion mit anderen Beanspruchungsarten war überhaupt keine Rede.

Dieser Bemessungsvorgang führte einerseits zu gewissen Unzulänglichkeiten und zum anderen, in einigen Fällen, zu einer Torsionsbruchgefahr. Diese bedauerliche Situation herrschte bis zu den 50er Jahren, als zum ersten Mal ernsthafte Anstrengungen gemacht wurden, das Problem intensiv zu erforschen. Die Notwendigkeit sowie die Zweckmäßigkeit hierzu war klar: Einerseits verlangten die Architekten neuere und schlankere Bauformen, bei denen Torsion nicht mehr sekundär betrachtet werden durfte, z. B. gekrümmte Träger, Wendeltreppen, schiefe oder gekrümmte Brücken, Randbalken, Trägerroste, orthotropische Schalen und derartiges mehr. Man mußte also seine Bauten räumlich betrachten und berechnen; die Torsionsbeanspruchung wurde dadurch primär. Die Entwicklung präziser Berechnungsverfahren sowie die immer kleiner werdenden Sicherheitsfaktoren ergaben auch schlankere Bauten, bei denen die Torsionswirkung ziemlich ausgeprägt war. Andererseits war die Zweckmäßigkeit einer intensiveren Untersuchung kombinierter Torsion dadurch gegeben, da man in den 50er Jahren für die Biegebemessung das Traglastverfahren schon herangezogen und über Schubbruch wichtige Kenntnisse gewonnen hatte, so daß eine baldige Einführung einer Traglast-bedingten Schubbemessung vor^{aus}zusehen war. Das Traglastverfahren auf Torsion zu erweitern, war als natürliche Reihenfolge dieser Kette vorzusehen.

Bis vor Mitte der 60er Jahre findet man in der Literatur etwa 600 Versuchsergebnisse in etwa 40 Hauptarbeiten; verglichen mit den Untersuchungen anderer Beanspruchungsarten ein sehr kleiner Beitrag! Die Untersuchung von reiner Torsion unbewehrten Betons wurde hierbei mehr betont; weniger beachtet wurde die Torsion von Stahlbeton und Spannbeton, vor allem die kombinierte Beanspruchung. Das "American Concrete Institute Torsion Symposium" fand im März 1966 statt. In dem "Symposium Volume, SP - 18" [54] sind 18 Veröffentlichungen enthalten. Etwa 34 Beiträge wurden bei der "International Conference on Shear, Torsion and Bond in Reinforced and Prestressed Concrete - Coimbatore, Indien - Jan, 1969" vorgelegt, viele hiervon über Torsion. Später kamen weitere etwa 100 Veröffentlichungen und Versuchsberichte hinzu. Über 1000 brauchbare Versuchsergebnisse ist in der Literatur bis jetzt schon berichtet worden, und zwar über Stahlbetonbalken allein. Außerdem sind mehrere eindrucksvolle theoretische Arbeiten geleistet worden, die unsere Torsionskenntnisse vertieft haben. Zweifellos ist die Versuchsanstrengung der letzten zehn Jahre recht beeindruckend, und sicherlich ist man sehr weit vorangekommen, um dieses außerordentlich komplexe Problem zu verstehen.

Eine kritische Betrachtung der vorhandenen Untersuchungen zeigt jedoch nicht nur mehrere Lücken, sondern vor allem einen Mangel koordinierter Anstrengung. So findet man in der Versuchsplanung einerseits unnötige Überschneidung, während andere Aspekte des Problems kaum erforscht wurden, z. B. das Problem Torsion + Querkraft, Torsion + Biegung + Axialkraft, kombinierte Beanspruchung unter Gleichlast und Spannbeton unter kombinierter Beanspruchung. Relativ unbeachtet blieb auch das Problem der Torsionssteifigkeit im Zustand II, obwohl eine Kenntnis hierüber für die praktische Berechnung unbedingt nötig ist.

Erstaunlicherweise fehlt uns auch eine systematische Auswertung der schon vorhandenen wertvollen Versuchsergebnisse, die sicher zur Aufklärung der Wirkungsweise wichtiger Einflußfaktoren hätten helfen können. Mit diesem Ausgangspunkt sollte man dann die künftigen Versuche so planen, daß möglichst alle in der Literatur vorhandenen Lücken geschlossen werden können. Sicherlich ist hierzu ein umfangreiches Versuchsprogramm notwendig, dies dürfte aber durch eine an verschiedenen Instituten vorgenommene Versuchsanstrengung möglich sein. Nur auf diese Weise kann eine endgültige Aussage über dieses Thema gemacht und eine Vervollständigung der gegenwärtigen Bestimmungen hinsichtlich der Torsionsbemessung ermöglicht werden.

2. Geschichtliches

2.1 Reine Torsion

2.1.1 Unbewehrter Beton

Im Jahre 1853 präsentierte St. Venant seine Abhandlung über Torsion, in der er unter Zugrundelegung der Elastizitätstheorie eine strenge Lösung für homogene Baustoffe erzielte. Diese Arbeit übte einen derartigen Einfluß aus, daß sie bis heute, in der einen oder der anderen Form, als Basis einer Torsionsstudie der meisten Baustoffe - einschließlich Beton, Stahlbeton und Spannbeton - dient. Der Grenzzustand soll erreicht werden, wenn die maximale Schubspannung bzw. die maximale Hauptzugspannung der Betonzugfestigkeit gleicht. Für den rechteckigen Querschnitt wird somit das Torsionsbruchmoment eines Betonkörpers

$$T_{\text{elas.}} = \alpha b^2 d \beta_z \quad (1),$$

wobei der Beiwert α wiederum vom Seitenverhältnis b/d abhängt.

Da die Torsionsversuche an Beton zeigten, daß die tatsächlich vorhandene Traglast im Vergleich zu dem nach Gl. 1 errechneten Wert um etwa 50 % größer ausfällt, hat man versucht, dies auf ein gewisses plastisches Verhalten des Betons zurückzuführen. So modifizierten einige Verfasser die Gl. 1, indem sie einen empirischen Faktor einführten, dessen physikalische Bedeutung jedoch unaufgeklärt blieb.

Um Gründe für die beobachtete höhere Torsionsfestigkeit anzugeben, hat man ferner oft die Plastizitätstheorie herangezogen, beruhend auf der Nadaischen Sandhügelanalogie. So erhielt man z. B.

$$T_{\text{plas.}} = \beta b^2 d \beta_z \quad (2),$$

wobei der Beiwert β wiederum von b/d abhängt.

Obwohl es der Plastizitätstheorie gelang, in manchen Fällen die höhere Tragfähigkeit aufzuklären, kann man sie kaum für richtig halten, denn Beton hat ja eine sehr geringe plastische Eigenschaft, besonders bei Zugbelastung.

Alle der oben erwähnten klassischen Theorien setzten somit voraus, daß die Bruchfläche eines torsionsbeanspruchten Betonbalkens spiralförmig ist (s. Bild 1).

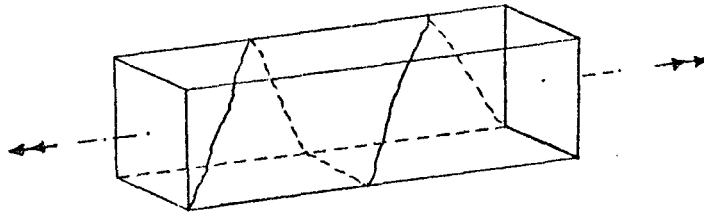


Bild 1 Spiralförmige Risse bei unbewehrtem Beton bei reiner Torsion

Die an dem PCA Structural Laboratory mit Hilfe einer schnell laufenden Kamera bekommenen Versuchsaufnahmen zeigten aber keine volle Entwicklung der Spiralarisse, sondern daß an der vierten Seite eine deutliche Druckzone erscheint, nachdem der Spiralriß drei Seiten des Balkens umschlossen hat. Der Bruch erfolgt somit unter Ausbildung einer schiefen Bruchfläche mit einer parallel zur Balkenseite verlaufenden Neutralachse. Lessig [13] stellte sich zum ersten Mal eine derartige Bruchfläche vor. Hsu [54, S. 203 bis 238] vereinfachte sie zu einer ebenen Fläche, und unter Betrachtung des Gleichgewichts ermittelte er das Tragmoment folgendermaßen:

$$T = \frac{b^2 d}{3} (0,85 \beta_{bz}) \quad (3)$$

Eine gewisse Ähnlichkeit zwischen Gleichungen (1), (2) und (3) ist leicht erkennbar.

2.1.2 Stahlbeton

Ein gemeinsamer Ausgangspunkt der meisten Theorien besteht darin, daß die Tragfähigkeit eines bewehrten Balkens gleich der Summe der Beiträge des Betons und der Bewehrung ist.

$$T = T_{\text{Beton}} + T_{\text{Bewehrung}} \quad (4)$$

Alle sind sich ferner darüber einig, daß allein die Längsbewehrung oder die Bügel die Tragfähigkeit nicht wesentlich beeinflussen, sondern die Traglast erst durch ihre gemeinsame Wirkung erhöht wird. Es darf hier vielleicht erwähnt werden, daß die grundlegende Hypothese, auf der Gl. 4 beruht, die Gleichgewichts- aber nicht unbedingt die Verträglichkeitsbedingung erfüllt.

Die Beiträge T_{Beton} sowie $T_{\text{Bewehrung}}$ wurden auf der einen Seite empirisch zum Ausdruck gebracht, zum anderen wurden auch rationelle Theorien aufgestellt (z. B. Rausch [5], Cowan [7], Anderson [1]).

Bereits 1929 entwickelte Rausch eine Methode zur Ermittlung des Bewehrungsbetrags unter Zugrundelegung eines räumlichen Fachwerkes, das dem gerissenen Balken gleichwertig angesehen wurde (s. Bild 2). Den Beitrag T_{Beton} setzte Rausch gleich Null. Die Rauschsche Theorie dient bis heute als Grundlage der Torsionsbemessung mehrerer Stahlbetonbestimmungen, wie auch der deutschen.

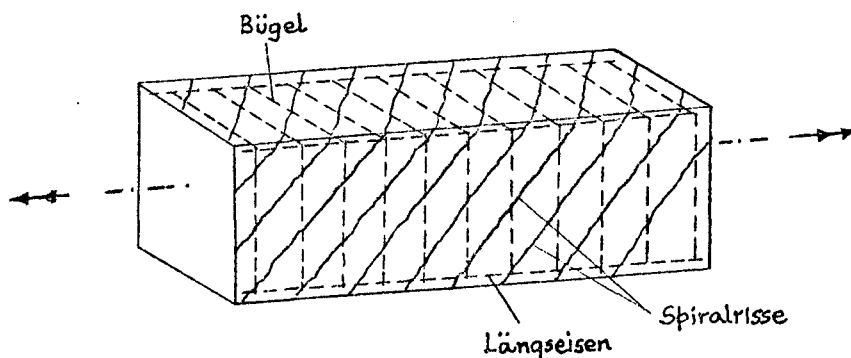


Bild 2 Räumliches Fachwerk

Anderson [1] modifizierte diese Theorie, indem er der Bewehrung nur den vom Beton überbleibenden Anteil zuwies. Den Beitrag des Betons errechnete Anderson an Hand der Elastizitätstheorie. Cowan [3] stellte seine Version mit Hilfe der Energiemethode auf. Diese wurde später die Basis der australischen Bestimmungen.

Alle drei Theorien lassen sich in der folgenden Form zusammenschreiben:

$$T = T_{\text{Beton}} + T_{\text{Bewehrung}} = T_{\text{Beton}} + \Omega b_1 d_1 \frac{F_{ss} \beta_{ss}}{s} \quad (5),$$

wobei der Beiwert Ω sowie der Beitrag T_{Beton} sich in den drei Fällen voneinander folgendermaßen unterscheiden:

	T_{Beton}	Ω
Rausch [5]	0	2,00
Anderson [1]	Auf Grund St.Venantscher Spannungsverteilung	1,33
Cowan [3]	Auf Grund St.Venantscher Spannungsverteilung	1,60

Die Stegbewehrung F_{ss} muß nun um das gleiche Volumen wie die Längsbewehrung vermehrt werden. Somit nimmt nach der Rausch-Anderson-Cowanschen Theorie jede Bewehrungsart eine 45° -Komponente der Diagonalzugkraft auf.

Die bisher erwähnten Arbeiten gingen also von der Vorstellung eines Superpositionsgesetzes aus. Man schlug entweder vor, daß der gerissene Beton keinen Torsionswiderstand leisten kann, so daß der Beitrag des Betons entfällt (z. B. Rausch), oder aber, daß der ungerissen gebliebene "Betonkern" des Querschnittes den Anteil T_{Beton} beiträgt. Eine an der PCA Structural Laboratory durchgeführte Versuchsreihe wies aber dieses Konzept zurück, denn man fand bei Voll- bzw. Hohlquerschnitten mit gleichen äußeren Abmessungen praktisch dieselbe Tragfähigkeit, obwohl bei den letzteren offensichtlich der "Betonkern" nicht vorhanden war. Anscheinend ist der Torsionswiderstand des Betons nicht auf den ungerissenen Betonkern zurückzuführen, sondern vielleicht auf die Schubfestigkeit der Betondruckzone.

Die Fachwerkanalogie legten auch in der jüngeren Zeit Lampert und Thürlimann [59], [69], [95] zu Grunde, um die Traglast zu ermitteln. Ihr physikalisches Modell setzt sich zusammen aus dem durch die Längseisen und Bügel gebildeten Armierungskorb und den Betondruckdiagonalen, welche sich in der Ebene der Armierung ausbilden. Die Herleitung der Bruchlast wird mit dem oberen Grenzwertsatz der Plastizitätstheorie durchgeführt.

Ende der 50er Jahre legte Lessig [13], [22] eine neue Theorie vor. Sie ging von der Vorstellung aus, daß der auf drei Seiten vom spiralförmigen Riss umschlossene Balkenteil (Bild 1) eine räumliche Bruchfläche aufweist. Eine "Betondruckzone" befindet sich auf der vierten Seite (Bild 3). Lessig betrachtete das Gleichgewicht dieses Balkenteiles und schrieb die Gleichgewichtsbedingungen unter der Voraussetzung auf, daß sämtliche Bewehrung zum

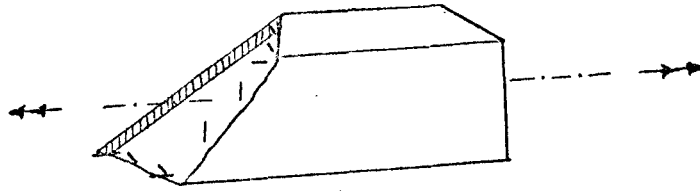


Bild 3 Die Lessigsche Bruchfläche (Bruchmodell 2)

Fließen kommt. Mit Hilfe des Minimalprinzips fand sie, daß sich die Neutralachse nur parallel zur Balkenseite bilden kann.

Die Lessigsche Theorie bildete die Grundlage der sowjetischen Stahlbetonbestimmungen. Sie wurde später von Yudin [25] modifiziert, blieb aber der Grundstein weiterer zahlreicher Arbeiten nicht nur in der U.d.S.S.R., sondern auch in anderen Ländern. Sie hat den Vorteil, für kombinierte Beanspruchung wie auch für rechteckige, T- und L-Querschnitte anwendbar zu sein.

Das Lessigsche Bruchkonzept nahm in der jüngeren Zeit Hsu [49] zu Hilfe, um die Traglast rechteckiger Querschnitte bei reiner Torsion zu ermitteln. Hsu idealisierte allerdings die räumliche Bruchfläche als eben, nahm jedoch Rücksicht auf die Dübelkräfte der Längsbewehrung sowie auf die Schubfestigkeit der Betondruckzone. Andererseits unterbreitete Kuyt [58] einen Verbesserungsvorschlag auf empirische Weise.

2.1.3 Spannbeton

Ein tordierter Spannbetonbalken ist einem zweiachsigen Spannungszustand unterworfen. Risse erscheinen, sobald in dem aus Vorspannung und Torsion zusammengesetzten Spannungszustand die Betonfestigkeit überwunden wird. Eine Ermittlung der Tragfähigkeit fällt schwer, da man hierzu eine genau definierte Bruchbedingung für den Baustoff Beton benötigt.

Wie bei unbewehrtem Beton hat man auch beim Spannbeton die Elastizitäts- sowie die Plastizitätstheorie herangezogen, um den Torsionsspannungszustand zu definieren. Ein Vergleich mit Versuchsergebnissen zeigte jedoch, daß die elastische Spannungsverteilung für höhere, die plastische Verteilung aber für niedrigere Betongüten zuverlässiger ist.

Die Bruchbedingung hat man aus bekannten klassischen Bruchhypothesen gewählt.

So setzt sich z. B. das Cowansche Dualkriterium aus der Rankineschen Maximalhauptspannungshypothese und der Coulombschen Theorie der inneren Reibung zusammen. Einen Verbesserungsvorschlag der Cowanschen Theorie legte Zia [21] vor, der als eine gute Näherung zur Mohrschen verallgemeinerten Bruchhypothese angesehen werden kann.

Im Vergleich zu Stahlbeton ist die Versuchsanstrengung^{auf} dem Gebiet des Spannbetons sehr beschränkt gewesen. Es hat sich jedoch gezeigt, daß die Bügelbewehrung nicht nur die Tragfähigkeit erhöht, sondern vor allem eine vorteilhafte Dehnbarkeit einbringt und damit den eigenartigen Sprödebruch des Spannbetons vermeidet.

2.2 Kombinierte Torsion

2.2.1 Stahlbeton

Der Fall, unbewehrter Beton unter kombinierter Beanspruchung, ist ohne jede praktische Bedeutung; deshalb wurde dieses Problem kaum untersucht. An Hand der Maximalhauptspannungshypothese stellte Cowan [4] eine parabolische Interaktionsgleichung zwischen T und M auf.

Bei der Bemessung der Stahlbetonbauteile ist dagegen der Fall Torsion mit Biegung und Querkraft außerordentlich wichtig; die Lösung des Problems ist jedoch äußerst schwierig, denn ebenso das Tragverhalten wie die Tragfähigkeit werden von mehreren Faktoren in einer sehr komplizierten Weise beeinflusst. 1945 legte Nylander [2] die erste theoretische Lösung des Problems für Stahlbetonbauteile ohne Schubbewehrung vor. Er ging von der Vorstellung aus, daß das Torsionsmoment zum Teil vom ungerissenen Beton aber zum Teil auch von den Stahldübelkräften aufzunehmen ist. Andererseits schlug Cowan [4]

an Hand seines oben erwähnten Dualbruchkriteriums eine Theorie für bügelbewehrte rechteckige Querschnitte vor, nach der zur Ermittlung der Traglast bei überwiegender Torsion die Hauptspannungshypothese, bei überwiegender Biegung dagegen die Theorie der inneren Reibung ausschlaggebend sein soll.

Ein wichtiges Ereignis zum Thema kombinierter Torsion ist die Ende der 50er Jahre von Lessig [13], [22] geleistete Arbeit, die ein mit einer schiefen Bruchfläche versehenes Bruchmodell zu Grunde legte. Nach Lessig erfolgt bei kleiner Torsionsbeanspruchung ein Bruch, in dem sich die Druckzone an der oberen Balkenseite bildet. Diesen nannte sie **M o d e l l 1** (s. Bild 4).

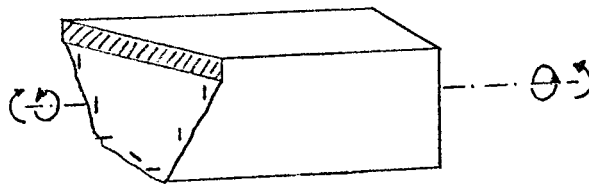


Bild 4 Die Lessigsche Bruchfläche (Bruchmodell 1)

Bei überwiegender Torsion, wie bei reiner Torsion, befindet sich dagegen die Druckzone an der Balkenseite (s. Bild 3); diese Bruchart nannte Lessig **M o d e l l 2**. Lessig ermittelte somit das Tragmoment unter Betrachtung des Balkengleichgewichtes, in dem sie vorweg annahm, daß sämtliche Bewehrung vor dem Bruch zum Fließen kommt.

Lessig selbst bestimmte die Traglast durch eine Minimierung des Momentes in der Arbeitsgleichung für den angenommenen Bruchmechanismus. Die nach ihrer Methode berechneten Traglasten liegen um 5 bis 10 % unter denen der Fachwerk-analogie; man könnte sie als "Arbeitsmethode" bezeichnen.

Verbesserungs- und Vervollständigungsvorschläge zur Lessigschen Theorie wurden später von anderen russischen Forschern unterbreitet. So idealisierte z. B. Yudin [25] die Bruchfläche, indem er eine einheitliche Rißneigung von 45° zu Grunde legte, während Lyalin [16] für das Längs- zu Bügelbewehrungsverhältnis einen Bereich aufstellte, damit das Fließen sämtlicher Bewehrung gewährleistet ist. Die von Yudin auf diese Weise aufgestellten Ausdrücke sind mit denen von Rausch, durch die Fachwerkmethode ermittelten Gleichungen, identisch. Dies ist nicht erstaunlich, da beide "Gleichgewichtsmethoden" sind.

Das von Lessig vorgestellte Bruchmodell wurde in der einen oder anderen Form von den Forschern der 60er Jahre als Basis weiterer Torsionstheorien übernommen; Gesund [30], [31] stellte sich z. B. ein räumliches S-förmiges Gelenk vor und schlug willkürliche Werte für die Rißneigung vor. Die Gesundsche Theorie ist ferner der erste Versuch, die Dübelwirkung des Stahls zu analysieren.

Die Lessigsche Theorie wurde von Goode und Helmy [39], Collins et. al. [52] und McMullen und Warwaruk [38] erweitert, da der Fall noch berücksichtigt wurde, daß sich die Druckzone auf der unteren Balkenseite bildet. Diese Bruchart - Modell 3 genannt - wurde bei mehreren Versuchen beobachtet, und zwar bei Balken, in denen die untere Bewehrung im Vergleich zu der oberen viel größer ausfiel. Dagegen blieben Pandit und Warwaruk [54, S. 133 bis 164] in ihrer Vorstellung beim z. B. von der Gleichung 5 aufgezeigten Superpositionsgesetz, wobei wiederum der Betonbeitrag von einem ungerissenen "Betonkern" geleistet werden soll. Andererseits erweiterten Lampert und Thürlimann [59], [69], [95] die räumliche Fachwerkanalogie auf den Fall kombinierter Beanspruchung.

Auf Grund intensiver experimenteller Untersuchung von kombinierter Torsion sind unsere Kenntnisse heute sehr weit vorangekommen. Obwohl mehrere Versuche mit Torsions- und Biegebeanspruchung durchgeführt wurden, sind über 270 brauchbare Versuchsergebnisse mit Torsion + Biegung + Querkraft vorhanden, von denen etwa die Hälfte an L- und T-Querschnitten gewonnen wurden; die letzten hauptsächlich an der University of Texas. Die meisten der in den U.S.A. durchgeführten Untersuchungen dienten vorwiegend der Aufstellung von Interaktionsdiagrammen zur Entwicklung empirischer Formeln für die praktische Bemessung.

2.2.2 Spannbeton

Es liegen keine theoretischen Arbeiten in diesem Gebiet vor; das Problem der Spannbetonbauteile unter kombinierter Torsion ist allerdings in der jüngeren Zeit experimentell erforscht worden, und zwar liegen etwa 250 Versuchsergebnisse vor, etwa 90 an T- bzw. I-Querschnitten. Die meisten Beiträge sind zur Aufstellung von Interaktionsdiagrammen geleistet worden, aber die Wirkungsweise der Vorspannkraft mit Torsion, Biegung und Querkraft blieb zum großen Teil unaufgeklärt. Am Institut für Baustoffkunde und Stahlbetonbau der T.U. Braunschweig ist aus diesem Grund mit einem Forschungsauftrag angefangen worden, in dem Spannbetonbalken (hauptsächlich T-Querschnitte) unter Torsion, Biegung und Querkraft zu untersuchen sind.

3. Über die wichtigen Torsionstheorien

Im folgenden wird näheres über die bisher geleisteten wichtigsten theoretischen Arbeiten berichtet. Zu diesem Zweck sind die vorgeschlagenen Theorien nach dem Grundgedanken und der Aufbauart aufgefaßt; mehr betont wurden dabei die für die Praxis bedeutenden Arbeiten über kombinierte Beanspruchung auf Stahlbetonbauteile.

3.1 Klassische Theorien

In dieser Kategorie sind die folgenden Arbeiten erwähnt, die auf der Elastizitäts- bzw. der Plastizitätstheorie beruhen:

1. Anderson [1]
2. Cowan [3] [4] [6] [7] [9] [17]
3. Zia [21]
4. Okada et. al. [35]
5. Pandit und Warwaruk [54, S. 133 bis 164]
6. Iyengar und Rangan [54, S. 403 bis 440]

Die Anderson-Cowansche Theorie für reine Torsion legte die St. Venantsche Spannungsverteilung zu Grunde. Beim Stahlbeton ist dann die Tragfähigkeit gleich der Summe der Beiträge des ganzen Betonquerschnittes und der Bewehrung, d. h. es gilt das Superpositionsgesetz. Durch eine Bruchbedingung ist die Betonfestigkeit erfaßt und damit der Traglastbeitrag des Betons berechnet. Zur Berechnung des Bewehrungsbeitrages wurde ein räumliches Fachwerk zu Grunde gelegt, wobei angenommen wurde, daß die Stahlspannung im allgemeinen der Betonspannungsverteilung folgt, d. h. keine Spannung in den Ecken eines rechteckigen Querschnittes. Die Theorie von Zia ist ein Verbesserungsvorschlag hinsichtlich der Bruchhüllkurve, indem er diese durch zwei Geraden ersetzte und damit der Mohrschen Hüllkurve näher kam.

Die Traglastberechnung nach Okada erfolgt unterschiedlich bei reiner bzw. bei kombinierter Torsion. Bei reiner Torsion ist der Vorgang ähnlich wie bei Anderson-Cowan, jedoch wurde eine plastische Betonspannungsverteilung angenommen.

Bei kleineren T/M-Verhältnissen soll dagegen ein "Biegebruch" auftreten, die Traglast könnte in diesem Fall wie bei reiner Torsion und mit Hilfe der Elastizitätstheorie ausgerechnet werden. Um die Grenzen des ungerissenen "Betonkerns" festzulegen, machte Okada einige Annahmen.

Die Theorie von Pandit und Warwaruk beruht wiederum auf dem Superpositionsprinzip, wobei allerdings der Betonbeitrag ebenso vom gedrückten (d. h. von einem ungerissenen Betonkern) wie vom ungedrückten Beton geleistet wird. Nach den Verfassern wandert die gedrückte Betonzone bei wachsendem T/M-Verhältnis gegen die Balkenmitte (s. Bild 5). Die Tragfähigkeit der gedrückten Zone hängt

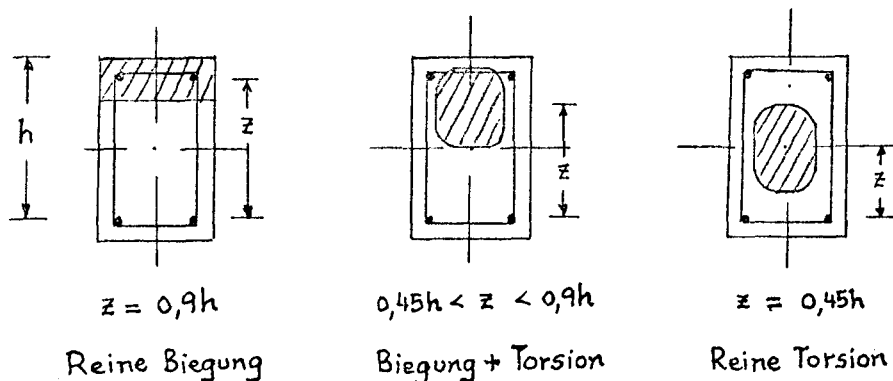


Bild 5 Einfluß der Torsion auf den inneren Hebelarm

von der Größe der Biegedruckspannungen ab; es wurde ferner angenommen, die Fläche der gedrückten Zone sei ein Viertel der Querschnittsfläche. In der gedrückten Zone herrscht ein zweiachsiger Spannungszustand; die Betonfestigkeit in diesem Fall wurde mit Hilfe des Cowanschen Bruchkriteriums ermittelt. Um den Beitrag der ungedrückten Zone zu ermitteln, wurde die Nadaische Sandhügelanalogie herangezogen. Das von der Bewehrung getragene Torsionsmoment besteht wiederum aus zwei Anteilen; der Beitrag der Bügel und der Anteil der in den Längseisen vorhandenen Dübelkraft. Bei der Berechnung verschiedener Beiträge haben die Autoren eine Anzahl von willkürlichen Annahmen getroffen, daher ist die Übereinstimmung mit Versuchsergebnissen nicht besonders gut.

Ähnlich ist der Zugang von Iyengar und Rangan für reine Torsion bzw. für große T/M-Verhältnisse; bei kleinen T/M-Verhältnissen soll dagegen ein "Biegebruch" auftreten. Im letzteren Fall wird mit Hilfe einer eigenen Bruchbedingung die Betonfestigkeit der gedrückten Zone und dadurch die Tragfähigkeit des Balkens ausgerechnet.

Der Nachteil der klassischen Theorien besteht hauptsächlich darin, daß sie kein wirklichkeitsnahes physikalisches Bruchmodell vorlegen, was die Voraussetzung eines Traglastverfahrens ist. Da das Superpositionskonzept, wie es z. B. aus Gl. 5 hervorgeht, die Grundhypothese praktisch aller Theorien darstellt, bedarf es einer genaueren Untersuchung. Einerseits wurde vorgebracht, daß im Grenzzustand der Beton so gerissen ist, daß er kaum einen Torsionswiderstand leisten kann; also muß die Bewehrung die gesamte Last tragen. Dies ist z. B. die Meinung von Rausch. Andererseits wurde von den Forschern der 60er Jahre behauptet, man könne sich auf den Betonwiderstand verlassen auf Grund der zugenommenen Torsionsfestigkeit des ungerissenen "Betonkerns". Um diese Ansichten zu prüfen, wurden an der "PCA Structural Laboratory" Parallelversuche an Hohlkasten- und Vollquerschnitten durchgeführt. Diese Versuchsergebnisse zeigten, daß bei gleichen äußeren Abmessungen und gleicher Bewehrung die Tragfähigkeit des Hohlquerschnittes der des Vollquerschnittes vergleichbar ist, obwohl die Hohlquerschnitte eine kleinere Reißlast aufzeigten. Hieraus muß der Schluß gezogen werden: die Kernwirkung ist keine annehmbare Erklärung des Torsionswiderstandes des Betons. Vielmehr scheint der Betonbeitrag durch die Schubfestigkeit der Betondruckzone geleistet worden zu sein.

3.2 Fachwerkanalogie

Zur Aufnahme eines äußeren Torsionsmomentes dachte sich Rausch [5] zum ersten Mal einen räumlichen fachwerkartigen Tragmechanismus, der sich aus einem Spiral- bzw. Netzbewehrungssystem (Längseisen + Bügel) und aus den zwischen den spiralförmigen Rissen fallenden Betondruckstreben bildet (s. Bild 6).

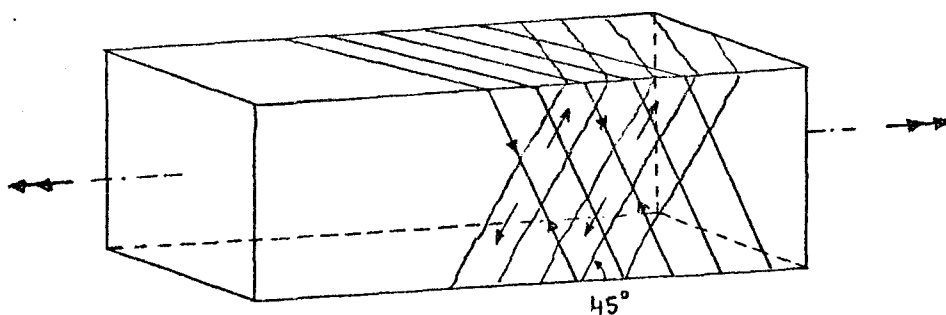


Bild 6 Räumliches Fachwerk mit Spiralbewehrung

Die Zug- und Druckdiagonale dieses Fachwerks sind zunächst unter 45° geneigt. Jede Spirale kann außerdem durch einen zur Balkenachse senkrecht gelegten Schnitt geschnitten werden. Die Zugkraft der Bewehrung kann man nun in zwei Komponenten zerlegen, eine senkrecht zum Balkenquerschnitt, die andere parallel zur Peripherie, in der die Bewehrung liegt. Das Moment dieser Kraft um die Balkenachse ergibt einen Torsionsmomentenanteil, der die Hälfte des Torsionswiderstandes der Bewehrung darstellt. Die andere Hälfte soll von den Betondruckstreben beigetragen werden.

Um den Torsionswiderstand der Bewehrung auszurechnen, muß man zunächst die Bewehrungskraft schätzen. Rausch nahm an, daß sämtliche in die Querschnittsebene fallende Bewehrung zum Fließen kommt. Auf diese Weise erhielt er den Ausdruck

$$T = 2 \sqrt{2} F^* \frac{F_s \beta_s}{s} \quad (6),$$

wobei F^* die von der Spiralbewehrung umschlossene Fläche und F_s , β_s , s der Stahlquerschnitt bzw. die Streckgrenze und der entlang der Balkenachse gemessene Abstand der Spiralbewehrung ist.

Später legten Anderson und dann Cowan eine modifizierte Torsionstheorie vor, in dem sie einmal dem Betonquerschnitt eine Torsionswiderstandsfähigkeit zuwiesen, die auf Grund der elastischen Spannungsverteilung ausgerechnet werden soll. Zum anderen legten sie zur Berechnung des Bewehrungsanteiles das räumliche Fachwerk zu Grunde; es wurde aber argumentiert, daß die Stahlspannung der Betonspannung folgt, d. h. nach der Elastizitätstheorie die größte Spannung in der Mitte der Balkenhöhe und die kleinste in den Ecken. Unter diesen Umständen soll die Bewehrung lediglich in der Mitte der Balkenhöhe ihre Streckgrenze erreichen können.

Versuchsergebnisse zeigen jedoch, daß die Bügelbewehrung ebenso in den Ecken wie in der Seitemitte zum Fließen kommt; dies weist darauf hin, daß nach dem Auftreten der Risse eine gewisse Spannungsumlagerung erfolgt. Die Rauschsche Annahme einer gleichmäßig verteilten Spannung und nicht etwa die Anderson-Cowansche Modifikation dazu scheint also gerechtfertigt zu sein.

Für längs- und bügelbewehrte Balken bedarf die Rausch-Anderson-Cowansche Theorie das gleiche Volumen der Längs- und Querbewehrung. Mit einer derartigen Netzbe-
wehrung nimmt jede Bewehrungsart eine 45° -Komponente der Zugkraft auf; somit fällt der Faktor $\sqrt{2}$ von Gl. 6 fort.

Der nächste Beitrag zur Fachwerkmethode stammte in der jüngeren Zeit von Lampert und Thürlimann [59], [69], [95]. Zur Tragfähigkeitsberechnung legten die Verfasser ein aus den in den Ecken als Stringern konzentriert gedachten Längseisen und den dazwischen fallenden Betonschubwänden bestehendes räumliches Fachwerkmodell zu Grunde. In den Schubwänden wirken die Bügel als Pfosten, während der zwischen die Risse fallende Beton die Druckstreben des Fachwerks darstellt. Die Neigung der Druckstreben in jeder Schubwand wird kritisch, wenn beim Bruch ebenso die Längseisen wie die Bügel ihre Streckgrenze erreichen; dadurch besteht das Fachwerkmodell aus Diagonalen mit variablen Neigungen. Ein vorzeitiges Betonversagen wird durch die Annahme eines unterbewehrten Querschnittes vermieden.

Bild 7 zeigt das vorgelegte Bruchmodell für einen zur z-Achse symmetrischen Querschnitt mit konstanter Bügelbewehrung auf allen Seiten. Aus den sechs für

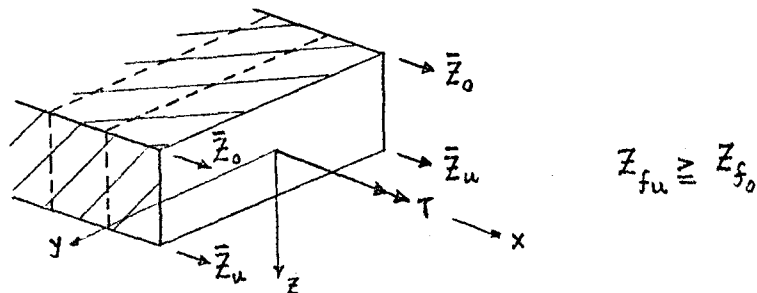


Bild 7 Fachwerkmodell für rechteckige Balken

ein räumliches Problem notwendigen Gleichgewichtsbedingungen erhält man bei reiner Torsion (für den Fall $\bar{F}_{eu} \cdot \beta_{esu} \geq \bar{F}_{eo} \cdot \beta_{eso}$) die kritische Rissneigung α aus der Gleichung:

$$\tan^2 \alpha = \frac{F_{ss} \cdot \beta_{ss}}{s} \cdot \frac{(b_1 + d_1)}{2 \bar{F}_{eo} \cdot \beta_{eso}} \quad (7)$$

Das Tragmoment wird dann:

$$T = 2 b_1 d_1 \sqrt{\frac{F_{ss} \cdot \beta_{ss}}{s} \cdot \frac{2 \bar{F}_{eo} \cdot \beta_{eso}}{(b_1 + d_1)}} \quad (8)$$

Für den Spezialfall eines symmetrisch bewehrten Querschnittes mit gleichem Volumen der Längs- und Bügelbewehrung erhält man aus Gl. 8 mit $\bar{F}_{eu} \cdot \beta_{esu} = \bar{F}_{eo} \cdot \beta_{eso}$ und $4 \bar{F}_{eo} \cdot \beta_{eso} = \frac{2 (b_1 + d_1) F_{ss} \beta_{ss}}{s}$:

$$\left. \begin{aligned} \tan \alpha &= 1; \quad \alpha = 45^\circ \quad \text{und} \\ T &= 2 b_1 d_1 \frac{F_{ss} \cdot \beta_{ss}}{s} \end{aligned} \right\} \quad (8 a)$$

Gl. (8a) ist identisch mit der Rauschen Gleichung (6) für eine Netzbewehrung.

Da die Gleichung (8) auf Grund der Gleichgewichtsbetrachtung aufgestellt wurde, steht sie in Übereinstimmung mit dem statischen Grenzwertsatz der Plastizitätstheorie; das errechnete Moment stellt somit eine untere Schranke für die Traglast dar. Mit Hilfe des kinematischen Grenzwertsatzes läßt sich dann beweisen, daß dieses Moment auch die obere Schranke darstellt; also ist es das tatsächliche Tragmoment. Der Mechanismus, bei dem dies erreicht wird, kommt vor, wenn die obere Bewehrung und die Bügel zum Fließen kommen.

Für Rechteckquerschnitte unter Torsion + Biegung lassen sich die Gleichgewichtsbedingungen ähnlich schreiben. Bei reiner Biegung fließt die untere, bei reiner Torsion dagegen die obere Längsbewehrung. Bei kombinierter Beanspruchung muß also ein Übergang vorhanden sein. Für den Fall "Fließen der unteren Bewehrung" kommt man zu der folgenden Interaktionsgleichung:

$$\left(\frac{T}{T_o} \right)^2 = \frac{\bar{F}_{eu} \cdot \beta_{esu}}{\bar{F}_{eo} \cdot \beta_{eso}} \left(1 - \frac{M}{M_o} \right) \quad (9 a)$$

Beim Fließen der oberen Längsbewehrung erhält man dagegen:

$$\left(\frac{T}{T_o} \right)^2 = 1 + \frac{\bar{F}_{eu} \cdot \beta_{esu}}{\bar{F}_{eo} \cdot \beta_{eso}} \cdot \frac{M}{M_o} \quad (9 b)$$

Die durch diese Gleichungen dargestellten Interaktionskurven sind im Bild 8 für die Fälle $\bar{F}_{eu} \cdot \beta_{esu} / \bar{F}_{eo} \cdot \beta_{eso}$ gleich 3 und 1 aufgestellt. Aus dem Bild geht hervor, daß bei stärkerer unterer Bewehrung eine gleichzeitige Einwirkung

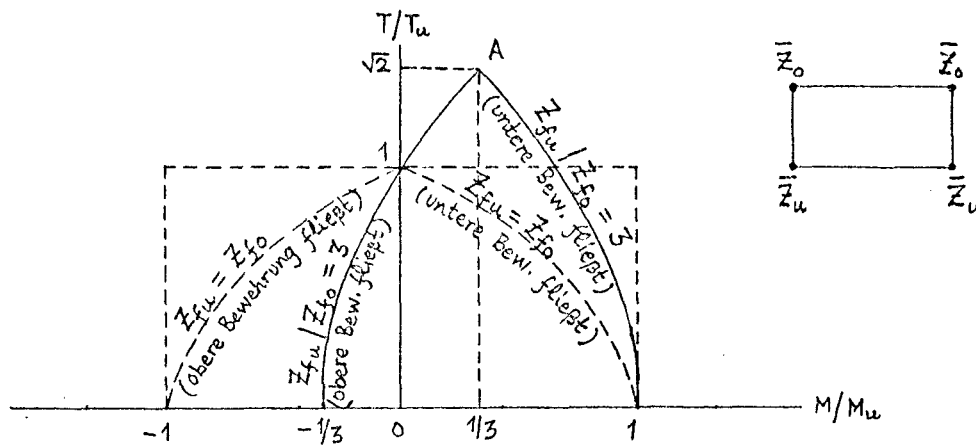


Bild 8 Torsions-Biegungs-Interaktion für rechteckige Querschnitte

eines Biegemomentes die Torsionstragfähigkeit erhöht, während sie bei symmetrischer Bewehrung erniedrigt wird.

Die vorgelegte Theorie ist anwendbar für Hohl- und Vollquerschnitte, deren Außenabmessungen in allen Richtungen die gleiche Größenordnung besitzen. Die Betondruckstreben des Fachwerkes können sich somit auch auf den schmalen Seiten bilden. Da der innere Betonkern zur Tragfähigkeit praktisch nichts beiträgt, kann ein Vollquerschnitt durch einen gleichwertigen wirksamen Hohlquerschnitt mit gleichen Außenabmessungen ersetzt werden, dessen ideelle Wandstärke als kleinere der beiden Werte

$$t = \frac{b}{6} \quad \text{und} \quad t = \frac{b_1}{5} \quad (10)$$

angenommen werden könnte. Um den Bruch durch das Versagen der Betondruckstreben zu vermeiden, wurde für die für eine Kräfteumlagerung zwischen der Längs- und der Querbewehrung charakteristische kritische Rißneigung α_k die den Versuchsergebnissen angepaßten folgenden Grenzen vorgeschlagen:

$$0,5 < \tan \alpha_k < 2,0 \quad (11)$$

Um den Einfluß einer größeren Betondruckzone (die den inneren Hebelarm und somit das Tragmoment verkleinert) auf das Interaktionsdiagramm zu erfassen, schlugen die Verfasser eine genäherte Veränderung vor. Für die Bügelbemessung ist der Wert $\tan \alpha = 1$ maßgebend, bei dem das Volumen der Torsionsbewehrung minimal wird: es soll also gerechtfertigt sein, für die Bemessung ein Fachwerk mit 45°

geneigten Diagonalen zu wählen. Die Bügelbewehrung wird ferner nur vom Torsionsmoment abhängig. Der torsions- bzw. biegebedingte Bedarf der Längseisen braucht nur einfach überlagert zu werden.

Aus der obigen Schilderung wird klar, daß die Lampert-Thürlimannsche Theorie als eine umfassende und eingehende Erweiterung der Rauschschen Fachwerktheorie anzusehen ist, vor allem auf dem Gebiet der Torsions- und Biegeeinwirkung. Man kann aber auf diese Weise die Traglast der vorgegebenen und besonders der überbewehrten Querschnitte nicht ermitteln. Die Traglast der in der Praxis häufig vorkommenden T- und L-Balken läßt sich an Hand dieser Theorie auch nicht errechnen.

Vor kurzem hat Elfgrén [84] die Fachwerkanalogie erweitert, um den Einfluß der Querkraft mit einzuschließen. Er brachte ferner den Beweis, daß unter gleichen Voraussetzungen die Ausdrücke der Fachwerktheorie identisch mit denen der Theorie der schiefen Bruchfläche sind.

3.3 Die Theorie der schiefen Bruchfläche

Diese Methode der Traglastberechnung wurde zum ersten Mal von Lessig vorgelegt. Das von Lessig vorgeschlagene Bruchmodell mit der schiefen räumlichen Bruchfläche legten die meisten Forscher der 60er Jahre zu Grunde; es wurden Erweiterungen sowie Verbesserungen dieser Theorie von Zeit zu Zeit vorgeschlagen. Die wichtigsten Arbeiten hierüber sind die folgenden:

1. Lessig [13], [22]
2. Yudin [25]
3. Collins et al. [52]
4. Goode und Helmy [39]
5. Hsu [49]
6. Kuyt [58]
7. McMullen und Warwaruk [38]

3.3.1 Lessig:

In ihrer Vorstellung ging Lessig davon aus, daß bei Torsionsversuchen kurz vor dem Bruch, wenn der räumliche spiralartige Riß drei benachbarte Balkenseiten umschlossen hat, auf der vierten Seite eine Betondruckzone erscheint (s. hierzu Bild 3 bzw. Bild 4). Dies bedeutet, daß das Balkenversagen nicht durch eine volle Entwicklung des Spiralrisses entsteht, sondern vielmehr auf Grund einer gegenseitigen Verdrehung der zwei Balkenteile um eine Neutralachse; also wie bei Biege- oder Schubbruch. Man sagt daher, der Balken versagt auf "schiefe Biegung", die Drehachse ist eine die Rißenden verbindende Gerade, die Bruchfläche ist aber nicht eben, sondern räumlich gekrümmt (genannt "schiefe Bruchfläche"). Bei überwiegender Torsion bzw. Überwiegen von Torsion und Querkraft erscheint die Druckzone auf der Balkenseite, wo die Torsionsspannung der Querkraftspannung gegenübersteht (Bruchmodell 2). Bei überwiegender Biegung liegt dagegen die Druckzone auf der oberen Balkenseite (Modell 1). Die Traglast wird minimal, wenn die Neutralachse parallel zur Balkenoberfläche verläuft, die Betondruckzone also rechteckig ist.

Die Formeln zur Berechnung der Tragfähigkeit lassen sich entweder aus Gleichgewichtsgleichungen oder mit Hilfe des Prinzips der virtuellen Arbeit ableiten. Lessig beging den ersten Weg; sie betrachtete nur das Gleichgewicht der Momente in einer zur Neutralachse senkrecht stehenden Ebene und das Gleichgewicht aller Kräfte auf der Achse, die zur Druckzone senkrecht steht. Die übrigen vier Gleichgewichtsbedingungen eines räumlichen Problems fallen aus, denn wenn eine ungerissene Betondruckzone vorhanden ist, ist eine Verdrehung der Balkenteile nach dem Entstehen eines plastischen Gelenks nur um die Neutralachse möglich. Die kritische Neigung der Neutralachse ermittelte Lessig unter Minimierung der tragbaren Last; daher kann man diese Methode als "Arbeitsmethode" bezeichnen.

Es wurde ferner vorausgesetzt:

- a) Sämtliche im Bruchbereich liegende Bewehrung kommt zum Fließen;
- b) Beton nimmt keine Zugspannungen auf;
- c) Die im Bruchbereich liegenden Bügel sind gleichmäßig verteilt;
- d) Es sind im Bruchbereich keine Lasten vorhanden;
- e) Bei Bruchmodell 1 bleibt über die Bruchlänge das Verhältnis T/M konstant;
- f) Bei Modell 2 bleibt über der Bruchlänge das T/Q_b -Verhältnis konstant; und
- g) Man darf auf allen Balkenseiten die gleiche Rißneigung annehmen.

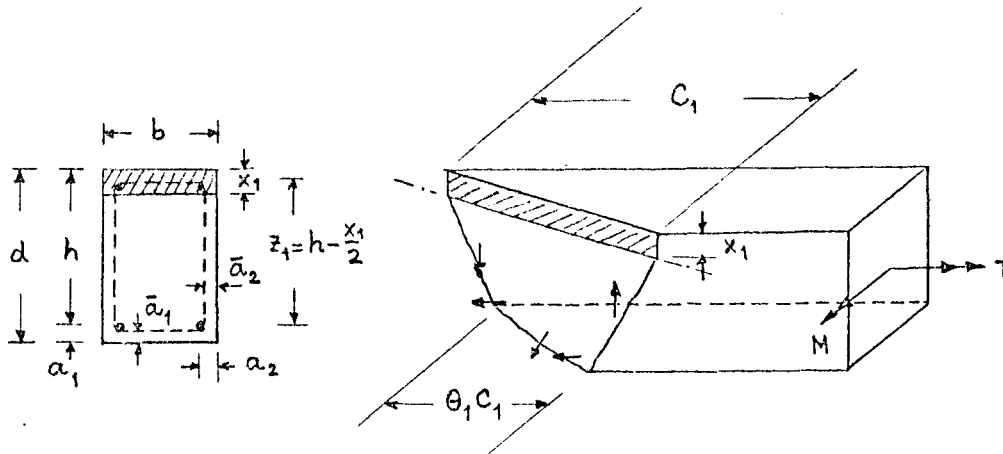


Bild 9 Lessigsche Bruchfläche (Modell 1)

Den kritischen Wert der Länge C_1 erhielt Lessig unter der Bedingung, daß die entsprechende Torsionstragfähigkeit minimal wird. An Hand der Bezeichnungen des Bildes 9 läßt sich dann für Bruchart 1 ableiten:

$$T = \phi M = \frac{1}{\left(\frac{1}{\phi} + \frac{C_1}{b}\right)} \cdot F_{e1} \beta_{s1} \left(z_1 + \frac{m_1 y_1 C_1^2}{bd}\right) \quad (12)$$

Ferner ist:

$$m_1 = \frac{F_{ss} \beta_{ss} d}{F_{e1} \beta_{s1} s} \quad (13)$$

$$y_1 = \theta_1 \left(d - \bar{a}_1 - \frac{x_1}{2}\right) + \frac{b}{4} \left(1 - \theta_1\right) \left(1 - \theta_1 - \frac{4}{b} a_2\right) \quad (14)$$

$$x_1 = \frac{F_{e1} \beta_{s1}}{\beta_R (b^2 + c_1^2)} \left(b + m_1 \theta_1 \frac{c_1^2}{d}\right) \quad (15)$$

$$\theta_1 \approx \frac{b}{2d + b} \quad \text{und}$$

$$\frac{c_1}{b} = -\frac{1}{\phi} + \sqrt{\frac{1}{\phi^2} + \frac{z_1}{m_1 y_1} \cdot \frac{d}{b}} \quad , \text{ aber nicht größer als } \frac{(2d + b)}{b} \quad (17)$$

wobei F_{e1} die in der Zugzone liegende Längsbewehrungsfläche
 β_{s1} die Streckgrenze der Längseisen und
 β_R die mittlere Betondruckspannung (etwa gleich $0,85 \beta_p$) darstellt.

Es zeigt sich, daß in Gl. (14) das zweite Glied gegenüber dem ersten klein ausfällt und auf y einen kleinen Einfluß ausübt. Somit darf man in der Mehrheit der praktischen Fälle

$$y_1 = \theta_1 \left(d - \bar{a}_1 - \frac{x_1}{2} \right) \approx \theta_1 z_1 \quad (14 a)$$

ansetzen; die Gleichungen lassen sich hierdurch sehr vereinfachen. Die praktische Berechnung der Tragfähigkeit zeigt ferner, daß der nach Gl. (15) errechnete Wert von x_1 so klein ausfällt, daß man als erste Näherung z_1 und y_1 als Konstante betrachten kann.

An Hand der Bezeichnungen des Bildes Lo erhält man auf ähnliche Weise für die

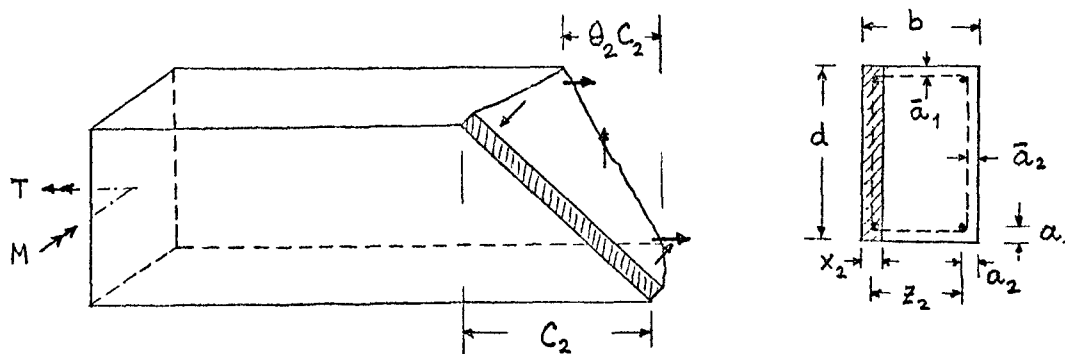


Bild 10 Lessigsche Bruchfläche (Modell 2)

Bruchart 2 die folgenden Ausdrücke:

$$T = \frac{Qb}{2\delta} = F_{e2} \beta_{s2} \frac{d}{c_2} \cdot \frac{z_2 + m_2 y_2 \cdot \frac{c_2^2}{bd}}{1 + \delta} \quad (18)$$

Ferner ist

$$m_2 = \frac{F_{ss} \beta_{ss} b}{F_{e2} \beta_{s2} s} \quad (19)$$

$$\delta = \frac{Q \cdot b}{2T}, \text{ also } \frac{T}{Qb} = \frac{1}{2\delta} \quad (20)$$

$$y_2 = \theta \left(b - \bar{a}_2 - \frac{x_2}{2} \right) + \frac{d}{4} (1 - \theta_2) (1 - \theta_2 - 4 \frac{\bar{a}_1}{d}) \quad (21)$$

$$\theta_2 \approx \frac{d}{2b + d} \quad (22)$$

$$x_2 = \frac{F_{e2} \beta_{s2} (d + m_2 \theta_2 \frac{c_2^2}{b}) - Q \cdot c_2}{\beta_R (c_2^2 + d^2)} \quad (23)$$

$$\frac{c_2}{d} = \sqrt{\frac{z_2}{m_2 y_2} \cdot \frac{b}{d}} \quad , \text{ aber nicht größer als } \frac{2b + d}{d} \quad (24)$$

In Anbetracht der kleinen Größe x_2 liegt man bei der Annahme $Q = 0$ auf der sicheren Seite. Wenn nötig, kann man an Hand der Bestimmung von Q aus Gleichung (18) einen genauen Wert von x_2 ermitteln. Aus gleicher Überlegung darf man bei der Berechnung der Werte z_2 und y_2 nach Gl. (21) $x_2 = 0$ ansetzen.

In Wirklichkeit fällt bei der Bruchart 2 die Länge c_2 größer als $(2b + d)$ aus; daher darf man gleich $c_2 = (2b + d)$ annehmen.

Um genauere Ergebnisse zu gewinnen, muß man bei der Tragfähigkeitsberechnung nach Bruchart 1 wie nach Bruchart 2 in den Ausdrücken für m und y einen Korrekturfaktor einführen, der den Einfluß der diskreten Bügelverteilung erfassen soll.

Um die Lessigsche Annahme, daß vor dem Bruch alle Stähle zum Fließen kommen, zu verwirklichen, stellte Lyalin [16] für den Parameter m_1 (s. Gl.13), der das Verhältnis der zwei Bewehrungen darstellt, die folgenden Grenzen auf, die sich an den Erkenntnissen aus den Versuchsergebnissen orientieren.

$\phi = \frac{T}{M}$	0	0,1	0,2-0,3	0,4-0,5	0,6-0,7	0,8-0,9	1,0-1,5	2
m_1	0	0,05-0,15	0,1-0,3	0,15-0,35	0,2-0,4	0,25-0,45	0,3-0,5	0,5-0,7

3.3.2 Yudin:

Eine Unzulänglichkeit der Lessigschen Theorie, wie auch aus Gl. (12) hervorgeht, besteht darin, daß jeder Mangel der Längsbewehrung durch zugelegte Torsionsbewehrung (und umgekehrt) kompensiert werden kann, und zwar ohne eine Tragfähigkeitsabminderung. Yudin zeigte auf, dies sei darauf zurückzuführen, daß die Lessigsche Gleichung zwar die Gleichgewichtsbedingung erfüllt, diese aber nicht ausreichend ist, da Lessig in diesem räumlichen Problem die Momentenvektoren nur entlang einer Achse berücksichtigt hatte.

Yudin schrieb daher drei Gleichgewichtsbedingungen auf, eine für die Kräfte und zwei für die Momente. Die Minimierung der Traglast fiel hier weg: damit ist die Yudinsche Version der Lessigschen Theorie eine "Gleichgewichtsmethode" genau wie die Fachwerktheorie. Die Bruchfläche idealisierte er mit einer Rißneigung von 45° und erhielt auf diese Weise folgende Ausdrücke für die Torsionsbemessung bei Bruchart 1:

$$F_{ss} = \frac{T \cdot s}{2 \beta_{ss} b_1 d_1} \quad (25)$$

$$F_{eu} = \frac{M}{\beta_{s1} d_1} + \frac{T(b_1 + d_1)}{2 \beta_{s1} b_1 d_1} \quad (26)$$

Bei Bruchart 2 bleiben Gleichungen (25) und (26) erhalten; es kommt lediglich T^* an Stelle von T , wobei

$$T^* = T + Q \frac{b^*}{2} \quad (27)$$

ist. Es ist bemerkenswert, daß Gl. 25 mit der Rauschschen Gl. 6 für den Fall einer Netzbewehrung identisch ist. Für reine Torsion liefert somit die Yudinsche Version der Theorie der schiefen Bruchfläche die gleichen Ausdrücke wie die Fachwerkanalogie von Rausch bzw. Lampert und Thürlimann (vergleiche hierzu auch Gl. 8 a). Dies ist verständlich, da - wie bereits erwähnt - die beiden "Gleichgewichtsmethoden" sind.

3.3.3 Collins et al.:

Die Verfasser erweiterten die Lessigsche Theorie, indem der Fall einer Ausbildung der Druckzone auf der unteren Balkenseite (genannt Modell 3) mit eingeschlossen wurde. Sie berücksichtigten das Gleichgewicht der Momente in der Längs- und der Querrichtung und ermittelten die Neigung der Druckzone unter der Bedingung, daß die Traglast minimal wird (wie bei Lessig). Unter einigen vereinfachenden Annahmen erzielten sie für Bruchmodell 1 den Ausdruck

$$T_1 = F_{eu} \beta_{esu} (h - k_a \cdot x) \cdot \frac{2m_c b}{b + 2d} \left(\sqrt{\frac{1}{\phi^2} + \frac{b + 2d}{bm_c}} - \frac{1}{\phi} \right) \quad (28)$$

und für Modell 3 den Ausdruck:

$$T_3 = F_{eu} \beta_{esu} (h - k_a \cdot x) \cdot \frac{2m_c b}{b + 2d} \left(\sqrt{\frac{1}{\phi^2} + \left(\frac{b + 2d}{bm_c} \right) \cdot \frac{F_{eo} \beta_{eso}}{F_{eu} \beta_{esu}}} + \frac{1}{\phi} \right) \quad (29)$$

Der kleinere Wert von T_1 und T_3 stellt die kritische Traglast dar, wenn keine Querkraft vorhanden ist. Maßgebend ist bei allen gewöhnlichen Fällen die Bruchart nach Modell 1. Lediglich tritt bei größeren T/M-Verhältnissen und bei Balken mit einer starken unteren und einer schwachen oberen Längsbewehrung die Bruchart 3 auf, so daß T_3 kritisch wird.

Bei Torsion- und Querkraftbeanspruchung kommt andererseits das Bruchmodell 2 vor. Der Ausdruck für die Tragfähigkeitsberechnung lautet in diesem Fall:

$$T_2 = F_{eu} \beta_{esu} (h - k_a x) \frac{d(b - a_2)}{(1 + \delta)bh} \sqrt{\frac{2 (F_{eu} \beta_{esu} + F_{eo} \beta_{eso}) bm_c}{(2b + d) F_{eu} \beta_{esu}}} \quad (30)$$

mit $\delta = \frac{Qb}{2T}$

3.3.4 Goode und Helmy:

Bei ihren Ableitungen an Hand des Lessigschen Bruchmodells berücksichtigten Die Verfasser neben dem Modell 3 ebenfalls den Fall, wenn beide Bewehrungsarten nicht gleichzeitig zum Fließen kommen. Sie betrachteten das Gleichgewicht der Kräfte in einer zur Neutralachse senkrecht stehenden Ebene sowie

das Gleichgewicht der Momente entlang und senkrecht zur Neutralachse und erzielten somit für Modell 1 die folgenden Ausdrücke:

$$\sigma_{bm} x (b^2 + c^2) = F_{eu} \sigma_{eu} b + \frac{F_{ss} \sigma_s}{s} \theta \cdot c^2 \left(1 - \frac{2a_4}{b}\right) \quad (31)$$

$$M = F_{eu} \sigma_{eu} (h - k_a x) - \frac{F_{ss} \sigma_s}{s} \cdot \frac{c^2}{4} \left(1 - \theta - \frac{2a_4}{b}\right) \left(1 + \theta - \frac{2a_4}{b}\right) \quad (32)$$

$$T = \frac{F_{ss} \sigma_s}{s} c \left(1 - \frac{2a_4}{b}\right) \left[\theta (d - a_3 - k_a x) + \frac{b}{2} \left(1 - \theta - \frac{2a_4}{b}\right) \right] \quad (33)$$

Die Verfasser nahmen an, daß bei den sogenannten Zugbrücken entweder die Längs- oder aber die Querbewehrung die Fließgrenze erreichen wird. Sie stellten ferner für die Parameter $\frac{\sigma_{bs}}{\beta_p}$, k_a , θ und c entweder empirische Ausdrücke auf oder machten hierzu Annahmen. Für ein vorhandenes T/M-Verhältnis kann man dann T ausrechnen, indem man in den gekoppelten Gleichungen 31 bis 33 zunächst x und σ_s oder σ_{eu} (derjenige, der nicht fließt) eliminiert. Anders nimmt man an, die beiden Stahlspannungen σ_s und σ_{eu} erreichen die Streckgrenze, und eliminiert dann x und c .

Um die Traglast bei Bruchart 3 zu berechnen, braucht man in den obigen Gleichungen des Modells 1 nur das Vorzeichen von M abzuändern und für F_{eu} bzw. σ_{eu} , F_{eo} bzw. σ_{eo} zu setzen. Die Parameter $\frac{\sigma_{bs}}{\beta_p}$ und k_a setzten die Verfasser gleich den bei reiner Biegung vorhandenen entsprechenden Werten und legten ferner eine einheitliche Rißeigung von 45° zu Grunde.

3.3.5 Hsu:

Hsu beschränkte seine theoretische und experimentelle Untersuchung auf reine Torsion. In seinen sorgfältig durchgeführten Versuchen beobachtete er die folgenden Phänomene, die auf Grund des Lessigschen Bruchmodells nicht erklärt werden können:

1. Die kürzeren Bügelarme haben meistens nur geringe Zugspannungen; gelegentlich bekommen sie sogar Druckspannungen. Die Lessigsche Theorie setzte voraus, daß sie die Fließgrenze erreichen.

2. Auf den schmalen Balkenseiten drängen die Risse steiler vor, sogar fast senkrecht zur Balkenachse.
3. Die Reißenden stehen an der Balkenkante gegeneinander versetzt, was das Vorhandensein einer Dübelwirkung andeutet. Diese Wirkung wurde auf Grund der an den gegenüber liegenden Stellen eines Längsstabes gemessenen Biegespannungen bestätigt. Die Lessigsche Theorie ließ jede Dübelkraft außer Acht.
4. Im Bruchzustand ist die Reißbreite an den Ecken und auf den schmalen Balkenseiten größer als in der Mitte der breiten Seite. Dies deutet wahrscheinlich darauf hin, daß die Drehachse anderswo liegt, als auf der Neutralachse, wie von Lessig angenommen wurde.

Auf Grund dieser Überlegungen schlug Hsu ein neues Bruchmodell mit einer ebenen Bruchfläche (s. Bild 11) vor und berücksichtigte gleichzeitig die

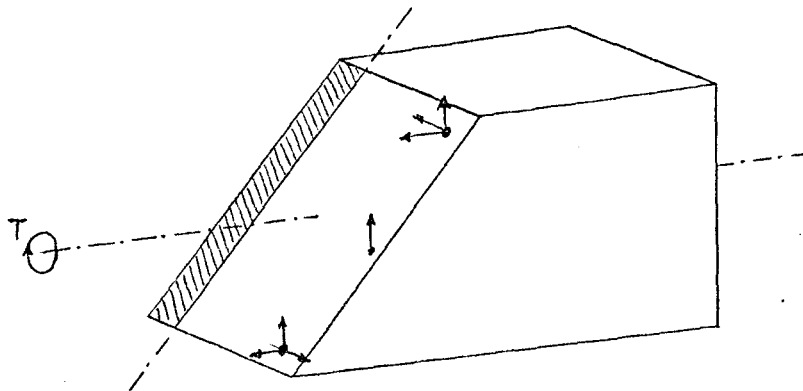


Bild 11 Hsusches Bruchmodell

Dübelkraft der Längsbewehrung. Unter der Annahme, daß alle Bewehrung die Fließgrenze erreicht, leitete er unter Betrachtung des Gleichgewichts den folgenden Ausdruck für die Tragfähigkeit ab:

$$T = \frac{1,015}{\sqrt{b}} b^2 d \beta_p + (0,66 m_H + 0,33 \frac{d_1}{b_1}) \frac{b_1 d_1 F_{ss} \beta_{ss}}{s} \quad (34)$$

wobei $m_H = \frac{\bar{F}_L \cdot s}{F_{ss} (b_1 + d_1)}$

ist und \bar{F}_L eine Hälfte der Querschnittsfläche der gesamten Längsbewehrung darstellt.

Gleichung 34 gilt offenbar nur für unterbewehrte rechteckige Querschnitte; daher legte Hsu einerseits eine obere Grenze für die gesamte Bewehrung vor (Balanced total volume percentage), zum anderen einen Bereich für das Verhältnis von Längs- zu Bügelbewehrung (Balanced Volume Ratio). Die vorgeschlagene Gleichung ist jedoch weder für quadratische noch für T- oder L-Querschnitte geeignet.

3.3.6 Kuyt:

Die Arbeit von Kuyt beschränkte sich ebenfalls auf reine Torsion rechteckiger Querschnitte. Er nahm auch das Lessigsche Bruchmodell zu Hilfe und leitete, unter einigen vereinfachenden Annahmen, nach dem Aufschreiben der Gleichgewichtsbedingungen die folgende Formel ab:

$$T = \frac{b_1 d_1}{\sqrt{b_1 + d_1}} \sqrt{\frac{2 F_L \beta_{esl} \cdot F_{ss} \beta_{ss}}{s}} \quad (36)$$

Hierin bedeuten:

F_L die Querschnittsfläche der gesamten Längsbewehrung und
 β_{esl} die Streckgrenze der Längsbewehrung.

Kuyt verbesserte nun die Formel (36) an Hand der Versuchsergebnisse von Hsu, und zwar in ähnlicher Weise wie bei Biegung. Somit erhielt er den Ausdruck:

$$T = \frac{b_1 d_1}{\sqrt{b_1 + d_1}} \sqrt{\frac{2 F_L \beta_{esl} \cdot F_{ss} \beta_{ss}}{s}} \left[1 - \frac{1,2}{bd\beta_p} \sqrt{\frac{2 F_L \beta_{esl} \cdot F_{ss} \beta_{ss} (b_1 + d_1)}{s}} \right] \quad (37)$$

Vor kurzem erweiterte Kuyt [96] seine Formel auf kombinierte Torsion mit Hilfe der Fachwerktheorie. Er gelangte - wie Lampert - zu einem parabolischen Interaktionsdiagramm.

3.3.7 McMullen und Warwaruk:

Mit ähnlichem Zugang wie Lessig entwickelten die Verfasser die Traglastformeln für die Bruchmodelle 1, 2 und 3, indem zunächst angenommen wurde, daß alle Eisen fließen und daß der Spiralriß eine einheitliche Neigung aufweist, die nie kleiner als 45° ausfällt. Wie bei Lessig schrieben die Verfasser nur zwei Gleichgewichtsbedingungen auf und erhielten somit für Bruchart 1 den Ausdruck:

$$T_1 = F_{eu} \beta_{esu} \left(\frac{d - a_1 - k_1 x_1 + \frac{m_1 y_1 c_1^2}{bd}}{\frac{c_1}{b} + \frac{1}{\phi}} \right) \quad (38 a)$$

wobei bedeuten

$$\left. \begin{aligned} m_1 &= \frac{F_{ss} \beta_{ss} d}{F_{eu} \beta_{esu} s} \\ y_1 &= \theta_1 \left(d - a_3 - \frac{k_1 x_1}{2} \right) + \frac{b}{4} (1 - \theta_1) \left(1 - \theta_1 - \frac{4a_4}{b} \right) \\ \theta &= \frac{b}{2d+b} \end{aligned} \right\} \quad (38 b)$$

Ferner ist:

$$x_1 = \frac{F_{eu} \beta_{esu} \left(b + \frac{m_1 \theta_1 c_1^2}{d} \right)}{0,85 k_1 \beta_p L_1^2} \quad (39)$$

$$c_1 = -\frac{b}{\phi} + b \left\{ \frac{1}{\phi^2} + \frac{d(d-a_1-k_1 x_1)}{m_1 y_1 b} \right\}^{1/2} \quad (40)$$

mit L_1 = Länge der Druckzone

$k_1 x_1$ = Äquivalenthöhe der Druckzone bei rechteckigem Spannungsblock.

Ähnliches erhält man für Modell 2:

$$T_2 = \frac{F_{es} \beta_{ess} d}{c_2} \left(\frac{b - a_2 - \frac{k_1 x_2}{2} + \frac{m_2 y_2 c_2^2}{bd}}{1 + \frac{Qb}{2T_2} - \frac{Qk_1 x_2}{2T_2}} \right) \quad (41 a)$$

$$\left. \begin{aligned} y_2 &= \theta_2 \left(b - a_4 - \frac{k_1 x_2}{2} \right) + (1 - \theta_2) \frac{d}{4} \left(1 - \theta_2 - \frac{4a_3}{d} \right) \\ m_2 &= \frac{F_{ss} \beta_{ss} b}{F_{es} \beta_{ess} s} \\ \theta_2 &= \frac{d}{2b+d} \end{aligned} \right\} \quad (41 b)$$

Ferner ist:

$$x_2 = \frac{F_{es} \beta_{ess} \left(d + \frac{m_2 \theta_2 c_2^2}{b} \right) - Q c_2}{0,85 k_1 \beta_{pL_2}^2} \quad (42)$$

und

$$c_2 = \left\{ \frac{bd \left(b - a_2 - \frac{k_1 x_2}{2} \right)}{m_2 y_2} \right\}^{1/2} \quad (43)$$

Für Bruchmodell 3 sind die Ausdrücke:

$$T_3 = F_{eo} \beta_{eso} \left(\frac{d - a_o - \frac{k_1 x_3}{2} + \frac{m_3 y_3 c_3^2}{bd}}{\frac{c_3}{b} - \frac{1}{\phi}} \right) \quad (44 a)$$

$$\left. \begin{aligned} y_3 &= \theta_3 \left(d - a_5 - \frac{k_1 x_3}{2} \right) + \frac{b}{4} (1 - \theta_3) \left(1 - \theta_3 - \frac{4a_4}{b} \right) \\ m_3 &= \frac{F_{ss} \beta_{ss} d}{F_{eo} \beta_{eso} s} \\ \theta_3 &= \frac{b}{2d+b} \end{aligned} \right\} \quad (44 b)$$

Ferner ist:

$$x_3 = \frac{F_{eo} \beta_{eso} \left(b + \frac{m_3 \theta_3 c_3^2}{d} \right)}{0,85 k_1 \beta_p L_3^2} \quad (45)$$

und

$$c_3 = \frac{b}{\phi} + b \left[\frac{1}{\phi^2} + \frac{d \left(d - a_0 - \frac{k_1 x_3}{2} \right)}{m_3 y_3 b} \right]^{1/2} \quad (46)$$

Für angegebene Werte von ϕ rechnet man x und c mit einem Interaktionsverfahren aus, indem man bei Modell 2 für Q anfangs Null setzt. Die theoretische Traglast ist der kleinste Wert aus T_1 , T_2 und T_3 , der dann der kritischen Bruchart entspricht.

3.4 Empirische Formeln

Auf Grund der experimentellen Untersuchungen wurden sehr häufig möglichst einfache Torsionsbemessungsformeln vorgeschlagen, die verständlicherweise eine bis auf den betreffenden Versuchsbereich beschränkte Gültigkeit besitzen. Bei kombinierter Beanspruchung Torsion-Biegung sowie Torsion-Querkraft hat man, vor allem in den U.S.A., die Aufstellung der Interaktionsdiagramme vorgezogen, die später in einer räumlichen Interaktionsfläche verknüpft werden können. Als Bemessungshilfsmittel sind zwar solche Interaktionsdiagramme sehr einfach und anschaulich, jedoch wurden sie immer für die sichere Seite vorgeschlagen, denn einerseits ist ihr Aufbau von empirischer Natur und zum anderen stellen sie nur die Einwirkung zweier Beanspruchungsarten dar, wobei alle anderen Balkenangaben - wie die Querschnittsabmessungen und die Bewehrung - festgehalten werden müssen. Aus diesem Grund können sie für die Torsionsbemessung kaum ausreichen. Sie erfassen ferner auch nicht den Einfluß aller für die Torsionstragfähigkeit bedeutenden Parameter.

Das Verhalten und die Tragfähigkeit der Stahlbetonbauteile unter Torsion + Biegung wird von den Querschnittsabmessungen, der Betongüte, der Menge und der Verteilung der Bewehrung und dem Torsion-Momenten-Verhältnis in starkem Maße beeinflusst. Für Balken ohne Torsionsbewehrung haben verschiedene Forscher Interaktionsdiagramme unterschiedlicher Art vorgeschlagen (s. Bild 12).

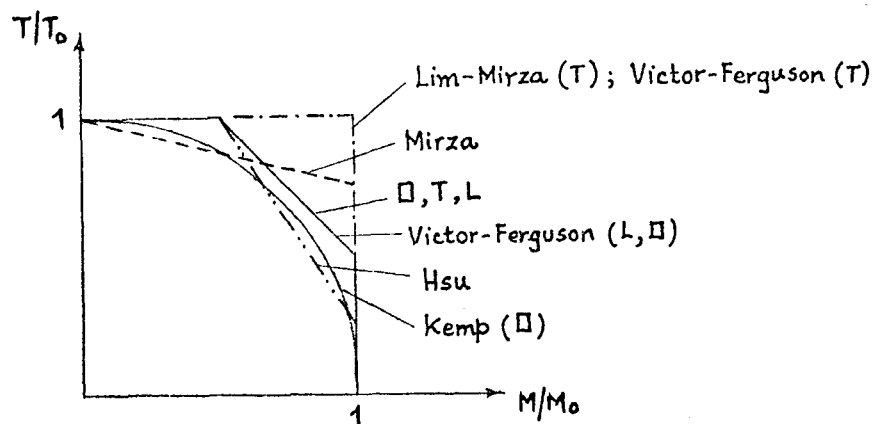


Bild 12 Torsion-Biegung-Interaktion bei Balken ohne Bügel

Der Viertel-Kreis ist praktisch die untere Schranke aller Versuchsdaten. Die größte Einwirkung liegt im Bereich $\frac{M}{M_0}$ zwischen 0,5 und 1,0, besonders für rechteckige Querschnitte. Am meisten wurde aber die Beanspruchung Torsion + Biegung an Balken mit Torsionsbewehrung untersucht. Es zeigte sich, daß bei einer stärkeren unteren Bewehrung das Vorhandensein eines kleinen Biegemomentes die Torsionstragfähigkeit wesentlich erhöht. Andererseits wird in Anwesenheit eines Biegemomentes bei symmetrisch bewehrten Balken die Torsionskapazität herabgesetzt. In beiden Fällen wird aber die Biegetragfähigkeit durch die Addition eines Torsionsmomentes reduziert, die größte Einwirkung liegt im Bereich von T/T_0 zwischen 0,5 und 1,0. Verschiedene Interaktionskurven zeigen das in diesem Fall.

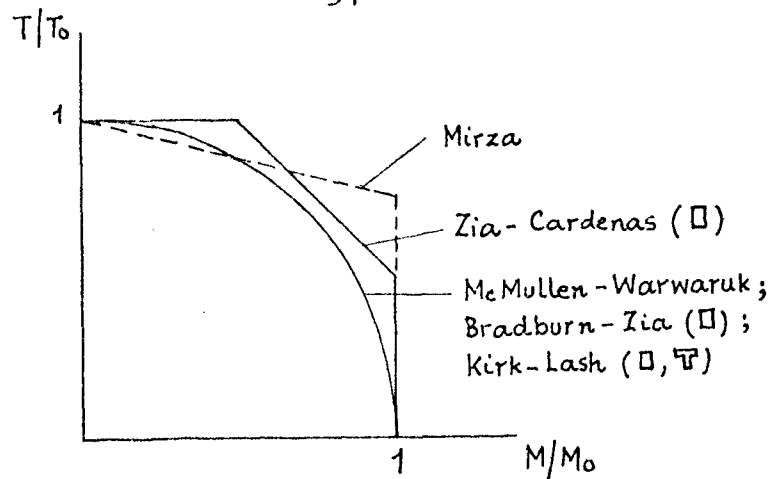


Bild 13 Torsion-Biegung-Interaktion bei bügelbewehrten Balken

Das Tragverhalten der Balken unter Torsion + Querkraft wurde bis jetzt kaum untersucht, hauptsächlich weil es unmöglich ist, über eine finite Balkenlänge die Beanspruchungskombination Torsion + Querkraft ohne Biegemoment zu erzeugen. Lediglich fällt in der Nähe des Momentennullpunktes eines Durchlaufträgers das Biegemoment klein aus und hat sekundären Einfluß. Auf diese Weise hat man die Einwirkung untersucht. In diesem Zusammenhang sind die an der University of Texas durchgeführten Versuche von Bedeutung, besonders die bei den torsionsbeanspruchten T- und L-Balken. Die Ergebnisse dieser Studien hat man als Interaktionskurve zwischen Torsion und Querkraft aufgetragen. Bild 14 zeigt eine Gegenüberstellung der von verschiedenen Forschern vorge-

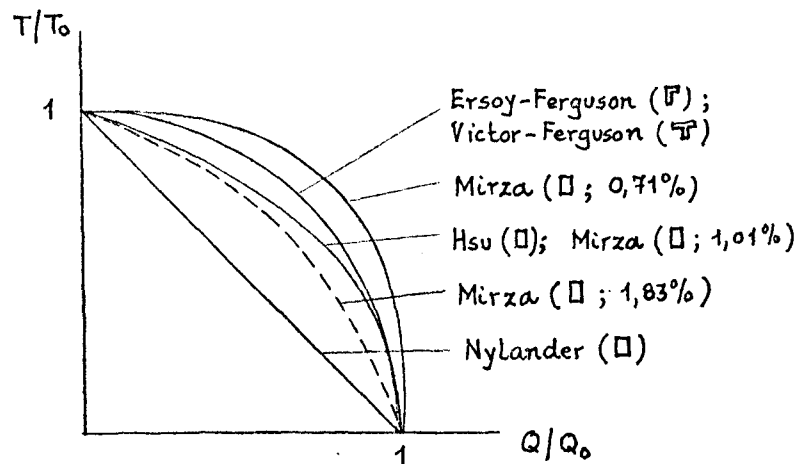


Bild 14 Torsion-Querkraft-Interaktion bei Balken ohne Bügel

schlagenen Interaktionskurven für Balken ohne Bügelbewehrung. Nach Mirza [62] übt der Längsbewehrungsprozentsatz einen Einfluß auf die Traglast aus. Die meisten Versuchsergebnisse liegen zwischen der Geraden und dem Viertelkreis. Die vorgeschlagene Interaktion zwischen Torsion und Querkraft bei bügelbewehrten Balken zeigt das Bild 15. Nach Mirza wird die Kurve wiederum von der Bügelbewehrung beeinflusst.

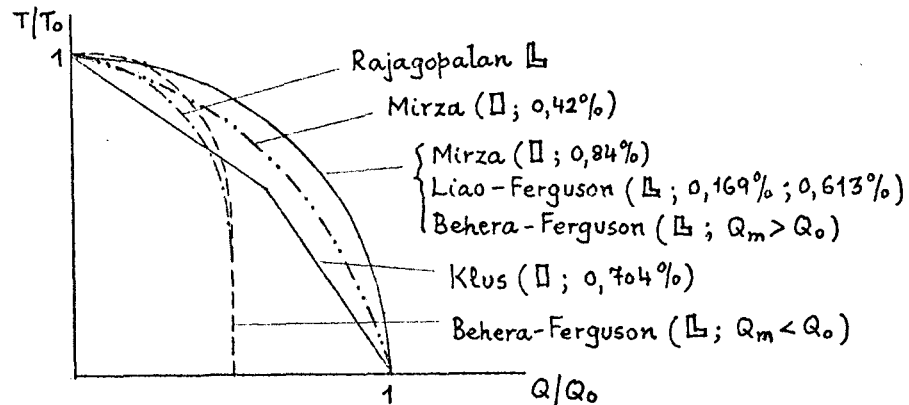


Bild 15 Torsion-Querkraft-Interaktion bei bügelbewehrten Balken

Die Interaktionskurven bedeuten nichts anderes als die Schnittlinien der räumlichen Torsion-Biegung-Querkraft-Interaktionsfläche mit den Torsions-Biegung-, Torsions-Querkraft- bzw. Biegung-Querkraft-Ebenen. Jeder Spannungszustand, der auf der Interaktionsfläche liegt, stellt den Grenzzustand dar. Derartige Flächen wurden auch als Hilfsmittel zur Traglastberechnung herangezogen. Die erste Interaktionsfläche wurde von Hsu für Balken ohne Bügel vorgeschlagen (s. Bild 16 a).

Über die Balken mit Bügeln ist in dieser Hinsicht wenig bekannt; die in der jüngeren Zeit an der University of Texas durchgeführten Versuche schlagen eine zylindrische Fläche vor (Bilder 16 d, f). Nach dem Vorschlag Collins hängt die Interaktionsfläche nicht nur von der Bruchart ab, sondern auch davon, wie die Längsbewehrung verteilt wurde (s. Bild 16 c).

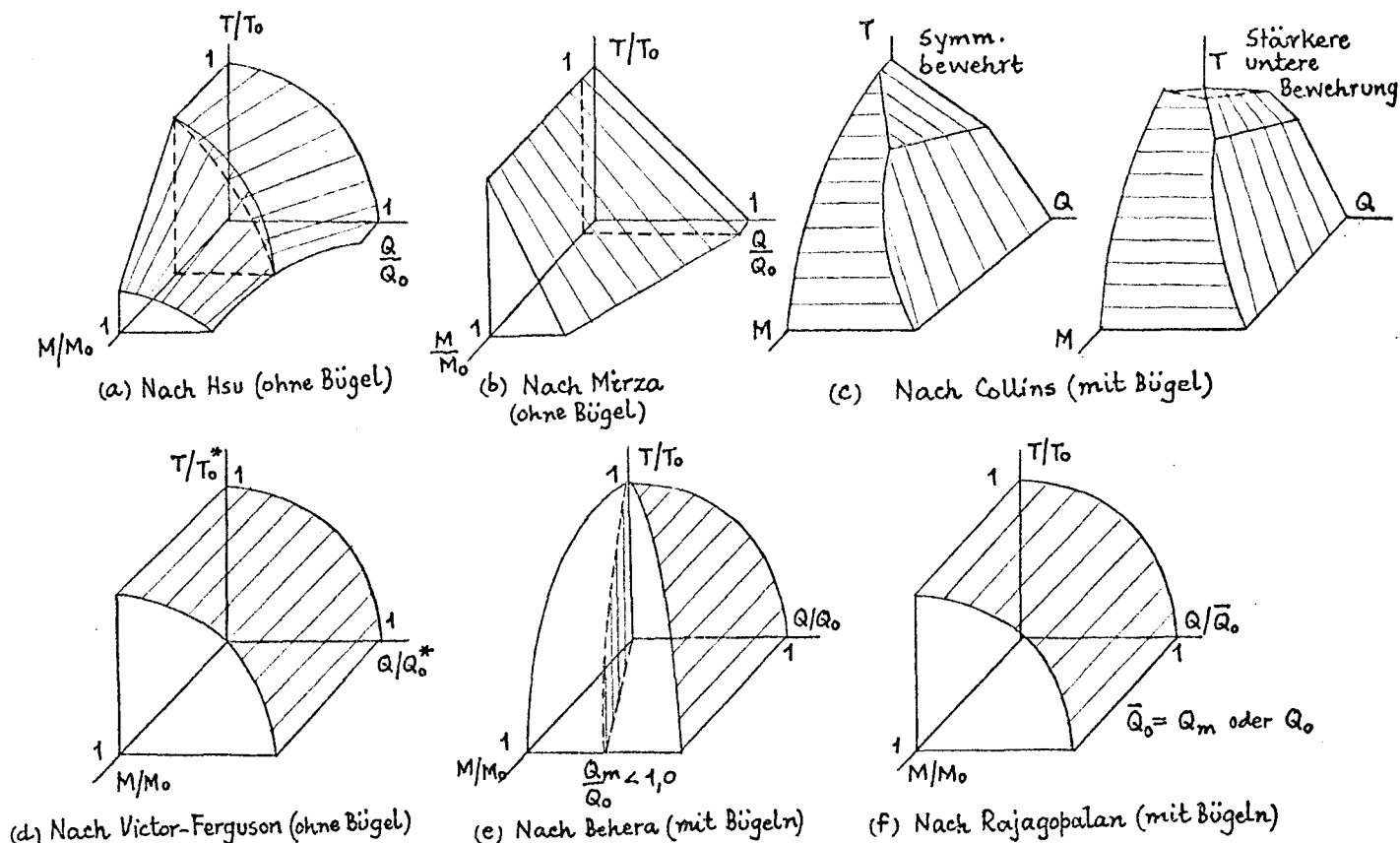


Bild 16 Interaktionsflächen nach verschiedenen Vorschlägen

3.4.1 Gleichmäßig verteilte Last

In allen Untersuchungen unter kombinierter Beanspruchung hat man bei der Versuchsanordnung immer Einzellasten aufgebracht, so daß im Prüffeld ebenso das Torsionsmoment wie die Querkraft konstant bleibt, während das Biegemoment einen linearen Verlauf aufweist. Die torsionsbeanspruchten Balken der Praxis sind aber meistens verteilt belastet.

In der Literatur sind bis jetzt nur zwei Arbeiten aus der University of Texas erwähnt worden. Victor und Ferguson [55] untersuchten 21 T-Balken ohne Bügelbewehrung und stellten fest, daß gleichmäßig belastete Balken im Verhältnis zu Balken mit Einzellasten eine etwa 25 % höhere Tragfähigkeit aufzeigen. Rajagopalan und Ferguson [94] untersuchten dagegen 7 bügelbewehrte L-Balken und kamen praktisch zu demselben Schluß. Es wird somit klar, daß man an Hand dieser Schlußfolgerung in der Bemessung solcher Bauteile wesentliche Ersparnisse erzielen könnte. Dieses Thema bedarf aber noch intensiver Erforschung, ehe man für die praktische Bemessung endgültige Empfehlungen geben kann.

3.5 Gegenüberstellung der wichtigen Torsionstheorien

Anhand der Bilder 17, 18 u. 19 sind die von verschiedenen Autoren aufgestellten Torsionstheorien veranschaulicht gegenübergestellt. In den Bildern 17 und 18 ist der Vergleich sämtlicher Theorien im Torsion-Moment-Koordinatensystem, im Bild 19 in dem Torsion-Querkraft-Koordinatensystem, durchgeführt. Die Bilder 17 und 18 zeigen deutlich, wie die verschiedenen Theorien die Torsion-Biegemoment-Interaktion erfassen. Die Tendenz sämtlicher Theorien ist die gleiche, obwohl der Sicherheitsfaktor unterschiedlich ausfällt. Die Lessigsche Theorie schließt die Bruchart 3 nicht ein und kann in dieser Hinsicht als mangelhaft bezeichnet werden, wie auch aus dem im Bild 18 aufgezeigten Vergleich mit den Versuchsergebnissen hervorgeht. Für unsymmetrisch bewehrte Querschnitte unter vorwiegender Torsion ergibt somit die Lessigsche Theorie Traglasten, die auf der unsicheren Seite liegen können.

Wie aus dem Bild 19 hervorgeht, erfassen alle Theorien die Torsion-Querkraft-Interaktion als linear. Die Formel von Collins liegt auf der sicheren Seite. Der im Bild aufgezeigte Vergleich mit Versuchsergebnissen täuscht allerdings, weil es unmöglich ist, im Versuch die gleichzeitige Einwirkung eines Biegemomentes auszuschalten. Je größer der Biegemomentenanteil ausfällt, desto mehr weicht die Theorie vom Versuch ab (vergl. Bild 19).

Die in den Bildern 17 bis 19 aufgetragene Gegenüberstellung zeigt, daß sämtliche Theorien die beiden Interaktionen in gleicher Weise erfassen (kleine Unterschiede in absoluten Werten ausgenommen!). Es darf hier jedoch erwähnt werden, daß die Traglastberechnung nach dem Lessigschen Bruchmodell im Gegensatz zu der nach dem Fachwerkmodell auf T- und L-förmige Querschnitte erweitert werden kann.

3.6 Die gegenwärtigen Bestimmungen für die Bemessung auf kombinierte Torsion

Im folgenden wird kurz über den derzeitigen Stand der wichtigsten Stahlbetonbestimmungen berichtet, insoweit diese sich mit der Bemessung rechteckiger Stahlbetonvollquerschnitte auf Torsion bzw. Torsion + Querkraft befassen.

3.6.1 DIN 1045 (1.1972)

3.6.1.1 Bemessung für Querkraft

Der nach der Beziehung

$$\left. \begin{array}{l} \tau_o = \frac{Q}{b \cdot z} \\ \text{mit } z \approx 0,85 h \end{array} \right\} \quad (47)$$

ermittelte Rechenwert τ_o der Schubspannung darf die in Tabelle 14 (DIN 1045) angegebenen Grenzen (τ_{o12} , τ_{o2} , τ_{o3}) nicht überschreiten. Man unterscheidet 3 Bereiche.

Im Bereich 1 ($\tau_o \leq \tau_{12}$) ist ein Nachweis der Schubbewehrung nicht erforderlich. Der Balken erhält lediglich eine konstruktive Schubbewehrung.

Im Bereich 2 ($\tau_{o12} < \tau_o \leq \tau_{o2}$) ist der Nachweis der Schubbewehrung erforderlich. Die Ermittlung der Schubbewehrung darf mit dem sogenannten Bemessungswert τ der Schubspannung nach der Mörsch'schen Fachwerkanalogie (Druckstreben unter 45° geneigt) durchgeführt werden. Der Bemessungswert τ ergibt sich aus der Abminderung des in jedem Querschnitt vorhandenen Rechenwertes τ_o nach Gl. 48 (verminderte Schubdeckung).

$$\tau = \frac{(\text{vorh } \tau_o)^2}{\tau_{o2}} = \eta \cdot \text{vorh } \tau_o \geq 0,4 \cdot \text{vorh } \tau_o \quad (48)$$

Diese verminderte Schubdeckung ist nur bei vorwiegend ruhender Belastung zulässig.

Im Bereich 3 ($\tau_{o2} < \tau_o \leq \tau_{o3}$) sind bei der Ermittlung der Schubbewehrung im ganzen Querkraftbereich gleichen Vorzeichens die Rechenwerte τ_o der Bemessung zugrunde zu legen (volle Schubdeckung). Dieser Bereich darf nur bei Balken mit $d > 45$ cm und bei Verwendung von Rippenstahl ausgenützt werden.

Die zulässige Stahlspannung ist mit $\frac{\beta_{ss}}{1,75}$, jedoch nicht mehr als 2400 kp/cm^2 , in Rechnung zu stellen.

3.6.1.2 Bemessung für Torsion und für Torsion + Querkraft

Der Rechenwert τ_T der Torsionsschubspannung (vgl. auch Gl. 1)

$$\left. \begin{aligned} \tau_T &= \frac{T}{\alpha b^2 d} \\ \left[\alpha &\approx \frac{1}{(3+1,8 \frac{b}{d})} \right] \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

ist mit den Querschnittswerten für Zustand I und für die Schnittgrößen unter Gebrauchslast ohne Berücksichtigung der Bewehrung zu ermitteln.

Reine Torsion:

Ist $\tau_T \leq 0,25 \tau_{02}$, so ist kein Nachweis der Torsionsbewehrung erforderlich.

Ist $0,25 \tau_{02} < \tau_T \leq \tau_{01}$, so ist ein Nachweis der Torsionsbewehrung erforderlich.

Eine Abminderung der Bewehrung wie bei Querkraft allein im Schubbereich 2 (verminderte Schubdeckung) ist bei Torsion nicht zulässig.

Zur Ermittlung der Torsionsbewehrung ist ein gedachter räumlicher Fachwerkkasten mit Druckstreben unter 45° Neigung zugrunde zu legen, dessen Mittellinie durch die Mitten der Längsstäbe der Torsionsbewehrung (Eckstäbe) verläuft.

Torsion und Querkraft:

Ist $\tau_0 + \tau_T \leq \tau_{012}$, so ist kein Nachweis der Bewehrung zu führen.

Ist $\tau_{012} < \tau_0 + \tau_T \leq 1,3 \tau_{02}$, so ist ein Nachweis der Bewehrung erforderlich.

Gleichzeitig muß aber auch gelten:

$$\begin{aligned} \tau_0 &\leq \tau_{03} \\ \text{und } \tau_T &\leq \tau_{02} \end{aligned}$$

Die Berechnung der Schubbewehrung erfolgt getrennt für die Teilwerte τ_0 und τ_T . Wenn $\tau_0 \leq \tau_{012}$, darf zur Vereinfachung für den Teilwert τ_0 die konstruktive Mindestbewehrung angesetzt werden. Die so errechneten Querschnittswerte der Schubbewehrung sind zusammenzuzählen.

Die Bemessung nach DIN 1045 erfolgt für die Gebrauchslast. Die Bruchlast ist dann mindestens 1,75 mal so groß wie die Gebrauchslast.

3.6.2 CEB/FIP Internationale Richtlinien zur Berechnung und Ausführung von Betonbauwerken (Juni 1972, mit Ergänzungsvorschlägen vom 11.7.1973)

Es können drei verschiedene Arten des Balkentragverhaltens (Fall A, Fall B, Fall C) vorkommen: diese Fälle unterscheiden sich durch die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten von Rissen im Steg und im Zuggurt. Fall A liegt vor, wenn die Wahrscheinlichkeit für das Rissaufreten ebenso im Steg wie im Gurt sehr gering ist. Die Tragfähigkeit wird in diesem Fall vom Beton allein bestimmt; es ist lediglich eine Mindestschubbewehrung einzubauen. Mit der Unterscheidung der Fälle B und C wird berücksichtigt, daß die schrägen Schubrisse entweder im Steg beginnen (Fall B) oder sich aus Biegerissen entwickeln (Fall C). Im Fall B wird die Tragfähigkeit entweder vom Beton allein oder (in den gerissenen Teilen des Steges) von einem Gitterwerk aus Stahlstäben und Betonstreben bestimmt; dieses Gitterwerk unterscheidet sich vom klassischen Ritter-Mörsch'schen Fachwerk im allgemeinen durch eine flachere Druckstrebenneigung ($< 45^\circ$). Im Fall C wird für die Schubtragfähigkeit das Ritter-Mörsch'sche Fachwerk (45° -Streben und parallele Gurte) zugrunde gelegt.

Um die praktische Anwendung zu vereinfachen, werden jedoch nur zwei Fälle unterschieden (Fall AB, Fall C).

Fall AB liegt vor, wenn

(a) bei geringer Torsionsbeanspruchung ($\tau_T \leq 0,5 R_{bk}$)

$$\sigma_{ch}^* < R_{bk} \quad (50)$$

ist, oder

(b) bei höherer Torsionsbeanspruchung ($\tau_T > 0,5 R_{bk}$)

$$\sigma_I^* < R_{bk} \quad \text{ist.} \quad (51)$$

Hierin bedeuten

- σ_{ch}^* der Rechenwert der Biegelängsspannung am Rand des Biegezuggurtes im ungerissenen Zustand,
 σ_I^* die maximale Hauptzugspannung am selben Rand,
 R_{bk} die charakteristische Betonzugfestigkeit, und
 τ_T die Torsionsschubspannung im ungerissenen Zustand.

Fall C liegt vor, wenn

$$\sigma_I^* > R_{bk} \text{ ist.} \quad (52)$$

Wie bei reiner Querkraft, so kann auch bei kombinierter Beanspruchung auf eine Unterteilung in Zonen verzichtet werden, d.h. nur der (ungünstigste) Fall C wird zugrunde gelegt. Es werden daher nur die Ausdrücke des Falles C wiedergegeben.

3.6.2.1 Bemessung auf Querkraft

Der Rechenwert der Schubspannung wird durch die Beziehung

$$\tau_o^* = \frac{Q}{bh} \quad (53)$$

ermittelt.

Nachweis des Betons: Besteht die Stegbewehrung aus lotrechten Bügeln oder aus einer Kombination dieser mit aufgebogenen Längsstäben, so entspricht der Bruchzustand infolge des Betonversagens dem geringeren der beiden folgenden Werte von τ_o^* :

$$51 \text{ kp/cm}^2 \text{ oder } 0,20 R_b^* \quad (54)$$

wobei R_b^* der Rechenwert der Betonzylinderdruckfestigkeit ist.

Nachweis der Stegbewehrung: Der Bruchzustand infolge Versagens des Stahls ist definiert durch:

$$p_{to} = \eta \cdot p_{tm} \quad (55)$$

p_{tm} ist der geometrische Prozentsatz der Stegbewehrung, der sich bei Anwendung der klassischen Fachwerktheorie von Ritter-Mörsch ergibt:

$$p_{tm} = \frac{1,15 \cdot \tau_o^*}{R_{at}^* (\sin \alpha + \cos \alpha) \sin \alpha} \quad (56)$$

Der Abminderungsbeiwert η ist definiert durch:

$$\left. \begin{aligned} \eta &= 1 - 1,25 \frac{\sqrt{R'_{bk}}}{\tau_o^*} \psi \quad (\text{in N/cm}^2) \\ \text{mit } \psi &= 0,5 + 33 \frac{F_{eu}}{bh}, \text{ wenn } \frac{100 F_{eu}}{bh} < 1,5 \\ \text{und } \psi &= 1, \text{ wenn } \frac{100 F_{eu}}{bh} \geq 1,5 \end{aligned} \right\} \quad (57)$$

Hierin bedeuten:

R_{at}^* der Rechenwert der Stahlzugfestigkeit der Stegbewehrung,

α die Neigung der Stegbewehrung zur Balkenachse und

R'_{bk} die charakteristische Betonzylinderdruckfestigkeit.

3.6.2.2 Bemessung auf Torsion

Der Rechenwert der Torsionsschubspannung ergibt sich aus der Bredt'schen Formel für Hohlquerschnitte:

$$\tau_t^* = \frac{T}{2A_o \cdot t_w} \quad (58)$$

Hierin bedeuten:

A_o von der Wandmittellinie umschlossene Fläche und

t_w die Wandstärke, die nicht größer als die ideelle Wandstärke eines entsprechenden Vollquerschnittes werden darf.

Für Rechteckvollquerschnitte gilt:

$$\left. \begin{array}{l} \text{wenn } b_k \geq \frac{5b}{6} : \\ t_w = \frac{b}{6} \\ A_o = \frac{5}{6} b(d - \frac{b}{6}) \end{array} \right\} \quad (59)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{wenn } b_k \leq \frac{5b}{6} : \\ t_w = \frac{b_k}{6} \\ A_o = b_k d_k \end{array} \right\} \quad (60)$$

wobei b_k der kleinere Abstand der Eckstäbe bedeutet.

Nachweis des Betons: Der Bruchzustand infolge reiner Torsion liegt vor, wenn die Spannung τ_t^* den kleineren der beiden folgenden Werte τ_{tu}^* erreicht (orthogonale Torsionsbewehrung):

$$45,9 \text{ kp/cm}^2 \quad \text{oder} \quad 0,18 R_b^* \quad (61)$$

Nachweis der Torsionsbewehrung: Bei parallel und rechtwinklig zur Stabachse angeordneter Torsionsbewehrung gelten für den Bruchzustand folgende Formeln:

$$\frac{F_{ss}}{s} = \frac{\Sigma F_l}{U} = \frac{T}{2A_o R_a^*} \quad (62)$$

wobei ΣF_l die Summe der Querschnittsflächen aller Torsionslängsstäbe

U den Umfang der Fläche A_o und

R_a^* den Rechenwert der Stahlzugfestigkeit bedeuten.

3.6.2.3 Bemessung auf Torsion und Querkraft

Nachweis des Betons: Der Bruchzustand infolge kombinierter Beanspruchung ist durch folgende Beziehung festgelegt:

$$\frac{\tau_o^*}{\tau_{ou}^*} + \frac{\tau_t^*}{\tau_{tu}^*} \leq 1 \quad (63)$$

Hierin ist τ_{ou}^* der Rechenwert der Steg Schubspannung, der dem Bruchzustand infolge Querkraft bei Biegung ohne Torsion entspricht.

Nachweis der Bewehrung: Es ist erlaubt, die Längs- und Querbewehrung getrennt für Torsion und für Biegung (Biegemoment und Querkraft) zu ermitteln und jeweils zu addieren. Die so ermittelte (und wahrscheinlich mehr als eigentlich erforderliche) Bewehrung darf man reduzieren, wenn der Bruchzustand mit Hilfe einer Methode nachgewiesen wird, die durch Versuchserfahrung ausreichend gesichert ist.

3.6.3 UdSSR-Stahlbetonbestimmungen von 1962 (SNiP II - C. 1 - 62)

Diese Bestimmungen sind als Anhang im Beton-Kalender 1973 Teil II (S. 531 - 656) [106] veröffentlicht worden.

3.6.3.1 Festigkeitsberechnung auf Querkraft

Elemente, die einen rechteckigen Querschnitt haben, müssen so projiziert werden, daß die folgenden Bedingungen erfüllt werden:

$$Q \leq 0,25 R_B \cdot bh \quad (64)$$

und, wenn nur lotrechte Bügel vorliegen, auch

$$Q \leq \sqrt{0,6 R_B bh^2 \frac{R_{ax} \cdot F_{Bü}}{s}} - R_{ax} \cdot F_{Bü} \quad \text{ist.} \quad (65)$$

Hierin bedeuten:

R_B die Rechnungsfestigkeit des Betons, die aus Tabelle 2 (der Bestimmungen) zu ermitteln ist

R_{ax} die Rechnungsfestigkeit des Stahls, die aus Tabelle 4 (der Bestimmungen) festzulegen ist und

$F_{Bü}$ die Querschnittsfläche des Bügels (alle lotrechten Schenkel).

3.6.3.2 Festigkeitsberechnung auf Torsion und Torsion + Biegung (mit Querkraft)

Für Stahlbetonelemente mit rechteckigem Querschnitt, die auf Torsion bei Biegung oder auf reine Torsion beansprucht werden, sind die Querschnittsabmessungen so zu bestimmen, daß die folgende Bedingung erfüllt wird:

$$T \leq 0,07 R_B \cdot b^2 d \quad (66)$$

Gleichzeitig muß die Größe der Querkraft in allen Fällen der Bedingung (64) sowie der folgenden Bedingung entsprechen.

$$Q \leq \frac{1}{1 + \frac{3T}{Qb}} \left[\sqrt{0,6 R_B bh^2 \frac{R_{ax} F_{Bü}}{s}} - R_{ax} F_{Bü} \right] \quad (67)$$

Elemente mit rechteckigem Querschnitt und unter reiner oder kombinierter Torsion sind folgendermaßen zu berechnen:

Nach Bruchschema 1 (s.Bild 9):

$$T_1 = \phi \cdot M \leq \frac{1}{\left(\frac{1}{\phi} + \frac{c_1}{b}\right)} \left[\left\{ R_a F_{eu} + R_{ax} \frac{F_{ss} \cdot C_1^2}{s(2d+b)} \right\} \left(h - \frac{x_1}{2}\right) + R_{ac} F_{eo} \left(\frac{x_1}{2} - a_1\right) \right] \quad (68)$$

$$\text{mit} \quad C_1 = -\frac{b}{\phi} + \sqrt{\left(\frac{b}{\phi}\right)^2 + \frac{R_a F_{eu} s}{R_{ax} F_{ss}} (2d+b)} \quad (69)$$

aber $C_{1\max} = 2d + b$

$$\text{und} \quad x_1 = \frac{b}{R_B (C_1^2 + b^2)} \left[R_a F_{eu} + R_{ax} \frac{F_{ss} C_1^2}{s(2d+b)} - R_{ac} F_{eo} \right] \quad (70)$$

aber $x_1 \leq 2a_0$

Nach Bruchschema 2 (s.Bild 10):

$$T_2 = \frac{Qb}{2\lambda} \leq \frac{d}{C_2} \cdot \frac{1}{(1+\lambda)} \left[R_a F_{es} + R_{ax} \frac{F_{ss} C_2^2}{s(2b+d)} \right] \left(b - a_2 - \frac{x_2}{2}\right) \quad (71)$$

$$\text{mit} \quad C_2 = \sqrt{\frac{R_a F_{es} s}{R_{ax} F_{ss}} (2b+d)} \quad (72)$$

aber $C_{2\max} = 2b + d$

$$\text{und} \quad x_2 = \frac{d}{R_B (C_2^2 + d^2)} \left[R_a F_{es} + R_{ax} \frac{F_{ss} C_2^2}{s(2b+d)} \right] \quad (73)$$

Hierbei ist R_a die Rechnungsfestigkeit der Längszugbewehrung und R_{ac} die Rechnungsfestigkeit der Längsdruckbewehrung.

Beide Werte sind der Tabelle 4 der Bestimmungen zu entnehmen. Für das Verhältnis der Längs- und der Querbewehrung sind auch Grenzen festgesetzt.

Bei $\frac{1}{\lambda} < 1 - 2 \frac{a_2}{b}$ wird die Berechnung eines Elementes nach den Formeln (71) bis (73) nicht aufgestellt, sondern der Querschnitt wird ohne Berücksichtigung der Torsionsbeanspruchung nur für Biegung (mit Querkraft) bemessen.

3.6.4 Amerikanische Bestimmungen von 1971 (Building Code requirements for reinforced concrete ACI 318-71)

3.6.4.1 Festigkeitsberechnung auf Querkraft

Der Rechenwert der Schubspannung wird aus folgender Beziehung ermittelt:

$$v = \frac{Q}{\phi b h} \quad (74)$$

ϕ ist der Sicherheitsbeiwert für die Tragfähigkeit (0,85 für Schub).

Der Rechenwert der vom Beton aufgetragenen Schubspannung v_b darf die folgende Grenze nicht überschreiten.

$$\left. \begin{array}{l} v_b \leq 0,53 \sqrt{\beta_{zyl}} \\ \text{oder } v_b \leq 0,503 \sqrt{\beta_{zyl}} + 176 \frac{F_{eu}}{bh} \cdot \frac{Qh}{M} \\ \text{aber } v_{bmax} \leq 0,928 \sqrt{\beta_{zyl}} \end{array} \right\} \quad (75)$$

β_{zyl} ist die Zylinderdruckfestigkeit des Betons. Das Verhältnis $\frac{Qh}{M}$ ist das im betreffenden Querschnitt vorhandene Verhältnis, das hier nicht größer als 1,0 angenommen werden soll.

Die Querschnittsfläche der lotrechten Stegbewehrung (Fläche aller vertikalen Schenkel) darf nicht geringer sein als der nach der folgenden Beziehung angegebene Wert.

$$\left. \begin{array}{l} F_{Bü} = \frac{(v_u - v_b) b s}{\beta_{ss}} \\ \text{und auch } F_{Bü} \leq \frac{2,12 \sqrt{\beta_{zyl}} \cdot b \cdot s}{\beta_{ss}} \end{array} \right\} \quad (76)$$

v_u ist der im Bruchzustand errechnete Wert der Schubspannung nach Gl. (74).

3.6.4.2 Festigkeitsberechnung auf Torsion und Querkraft

Der Rechenwert der Torsionsspannung wird nach folgender Beziehung berechnet.

$$\tau = \frac{3T}{\phi b^2 d} \quad (77)$$

Der Sicherheitswert ϕ ist wiederum 0,85 für kombinierte Torsion.

Der Rechenwert der vom Beton allein aufgetragenen Torsionsschubspannung τ_b darf die folgende Grenze nicht überschreiten.

$$\tau_b \leq \frac{0,636 \sqrt{\beta_{zy} l}}{\sqrt{1 + \left(\frac{1,2 \tau_u}{v_u}\right)^2}} \quad (78)$$

τ_u ist der im Bruchzustand errechnete Wert der Torsionsschubspannung nach Gl. (77).

Ist $\tau_u > 0,398 \sqrt{\beta_{zy} l}$, so muß gleichzeitig

$$v_b \leq \frac{0,53 \sqrt{\beta_{zy} l}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\tau_u}{1,2 v_u}\right)^2}} \quad \text{sein.} \quad (79)$$

Hingegen darf die Torsionsbeanspruchung vernachlässigt und die Bemessung nur für Querkraft durchgeführt werden, solange

$$\tau_u \leq 0,398 \sqrt{\beta_{zy} l} \quad \text{ist.} \quad (80)$$

Der Rechenwert der Torsionsschubspannung im Bruchzustand darf auf keinen Fall die folgende Grenze überschreiten.

$$\tau_u \leq \frac{3,18 \sqrt{\beta_{zy} l}}{\sqrt{1 + \left(\frac{1,2 v_u}{\tau_u}\right)^2}} \quad (81)$$

Die Querschnittsfläche des Bügelstabes (umschlossene Bügel) wird aus der folgenden Beziehung ermittelt.

$$\left. \begin{aligned} F_{ss} &= \frac{(\tau_u - v_u) s b^2 d}{3 \Omega b_1 d_1 \beta_{ss}} \\ \text{mit } \Omega &= 0,66 + 0,33 \frac{d_1}{b_1} \\ \text{aber auch} \\ \Omega &\leq 1,50 \end{aligned} \right\} \quad (82)$$

Die notwendige Querschnittsfläche ΣF_l der Torsionslängsbewehrung erhält man aus dem größeren der nach folgenden Beziehungen ermittelten Werte:

$$\Sigma F_l = 2 F_{ss} \frac{b_1 + d_1}{s} \quad (83)$$

$$\text{und} \quad \Sigma F_l = \left[\frac{28,12 b s}{\beta_{ss}} \left(\frac{\tau_u}{\tau_u + v_u} \right) - 2 F_{ss} \right] \left(\frac{b_1 + d_1}{s} \right) \quad (84)$$

In Gl. (84) darf angesetzt werden: $2 F_{ss} \geq \frac{3,515 b s}{\beta_{ss}}$

3.6.5 Kritische Bemerkungen zu den gegenwärtigen Bestimmungen:

Bilder 50 bis 53 zeigen einen direkten Vergleich der oben angegebenen Stahlbetonbestimmungen miteinander, mit der Fachwerkanalogie und mit den in den Kapiteln 6 bis 9 beschriebenen Versuchsergebnissen. Es sei hier erwähnt, daß von den Balken der Serien QT2, QT3 und QT4, bei denen unter Beibehaltung der Biegezugbewehrung nur die Torsionsbewehrung variiert wurde, die Balken QT2 die am schwächsten und die Balken QT4 die am stärksten bewehrten waren. Dieser Vergleich dürfte es ermöglichen, über die einzelnen Bestimmungen die folgenden kritischen Bemerkungen zu machen.

3.6.5.1 DIN 1045:

1. Die nur auf die Betongüte bezogenen oberen Grenzen der Spannungsrechenwerte (sowohl für die Biegeschub- als auch für die Torsionsschubspannung) ergeben unterschiedliche Sicherheiten, die umso größer ausfallen, je stärker die Bügelbewehrung ausgebildet wird. Dies wird durch einen Vergleich der Bilder 50 und 52 deutlich.
2. Die Zunahme der Torsionstragfähigkeit unsymmetrisch bewehrter Balken bei gleichzeitiger Einwirkung von kleinen bis mäßigen Biegemomenten wird durch die Normen nicht zum Ausdruck gebracht.
3. Da die Balkentragfähigkeit meistens durch den Nachweis des Betonversagens (bzw. der oberen Grenze der zulässigen Schubspannung) bestimmt wird, ist es von Interesse, die verschiedenen Bestimmungen in dieser Hinsicht miteinander zu vergleichen. Für einen rechteckigen Querschnitt von $b/d = 0,5$ lassen sich z.B. die zutreffenden oberen Grenzen der Torsionstraglast folgendermaßen ausdrücken:

$$\text{DIN 1045 (Gl. 49)} \quad : \quad T = 0,448 \tau_{02} b^2 d \quad = \psi b^2 d$$

$$\text{CEB/FIP - 1970 (Gl. 58 u. 61):} \quad T = 0,0458 R_b^* b^2 d \quad = \psi b^2 d$$

$$\text{SNIP - 1962 (Gl. 66)} \quad : \quad T = 0,07 R_B b^2 d \quad = \psi b^2 d$$

$$\text{ACI 318 - 71 (Gl. 77 u. 81)} \quad : \quad T = 0,9 \sqrt{\beta_{zt}} \cdot b^2 d \quad = \psi b^2 d$$

Wählen wir die drei Betonfestigkeitsklassen als Bn 150, Bn 250 und Bn 350, so sind:

für Bn 150: $\tau_{02} = 12 \text{ kp/cm}^2$; $R'_b = 85 \text{ kp/cm}^2$; $R_B = 100 \text{ kp/cm}^2$, und $\beta_{\text{zyl}} = 127 \text{ kp/cm}^2$

für Bn 250: $\tau_{02} = 18 \text{ "}$; $R'_b = 133,3 \text{ "}$; $R_B = 160 \text{ "}$, und $\beta_{\text{zyl}} = 212 \text{ "}$

für Bn 350: $\tau_{02} = 24 \text{ "}$; $R'_b = 186,6 \text{ "}$; $R_B = 210 \text{ "}$; und $\beta_{\text{zyl}} = 298 \text{ "}$

Der Beiwert ψ ist zum Vergleich in der nachfolgenden Tabelle ausgerechnet:

		Bn 150	Bn 250	Bn 350
DIN 1045	$\psi =$	5,38	8,06	10,75
CEB/FIP	$\psi =$	3,90	6,10	8,55
SNIP-62	$\psi =$	7,0	11,20	14,70
ACI 318	$\psi =$	10,15	13,10	15,55

Hieraus wird klar, daß die obere Grenze in DIN 1045 (sowie in den CEB/FIP-Richtlinien) vergleichsweise sehr niedrig angesetzt wurde, so daß in praktisch allen Fällen der Nachweis des Betonversagens die Tragkapazität bestimmt und die zugelegte Torsionsbewehrung kaum zum Ausdruck kommt (außer bei schwach bügelbewehrten Balken). Für Bemessungszwecke ist das in Ordnung, da man meistens einen schwach bewehrten Querschnitt bevorzugt, aber der Tragfähigkeitsnachweis eines vorhandenen Querschnitts nach DIN 1045 ergibt Rechenwerte, die bei mäßig und stark bügelbewehrten Balken viel kleiner ausfallen als aus den meisten Versuchserfahrungen hervorgeht. Unter kombinierter Beanspruchung wird dieser Unterschied noch ausgeprägter.

Da rein torsionsbeanspruchte Bauteile sowieso selten vorkommen, scheint es angebracht, ohne jegliches Risiko die obere Grenze der Torsionsschubspannung (mit Nachweis der Torsionsbewehrung) zu erhöhen, damit die durch die vorhandene Bewehrung festgelegte Tragfähigkeit in der Bewehrung zum Ausdruck kommt.

4. Vergleicht man ähnlich die Bestimmungen hinsichtlich der Querkraftsbemessung, so ergibt sich das folgende Bild. Die zutreffenden Grenzen bezogen auf den Beton- und den Bewehrungsnachweis sehen folgendermaßen aus:

Nachweis des Betons:

DIN 1045 (Gl. 47)	:	$Q = 1,49 \tau_{03} b h$	=	$\omega \cdot b h$
CEB/FIP (Gl. 53 u. 54):		$Q = 0,20 R'_b b h$	=	$\omega \cdot b h$
SNIP-1962 (Gl. 64)	:	$Q = 0,25 R_B b h$	=	$\omega \cdot b h$
ACI 318-71	:	$Q = 2,25 \sqrt{\beta_{zyl}} \cdot b h$	=	$\omega \cdot b h$

Nachweis der Schubbewehrung:

DIN 1045	:	$Q = \frac{0,85 F_{Bü} \beta_{ss} h}{s} \quad (\beta_s \leq 4200 \text{ kp/cm}^2)$	=	$\theta \cdot b h$
CEB/FIP (Gl. 55 - 57): (in N und cm)		$Q \cong \frac{0,756 F_{Bü} \beta_{ss} h}{s} + 1,26 b h \sqrt{R'_{bk}}$	=	$\theta \cdot b h$
SNIP-62 (Gl. 65)	:	$Q \cong \sqrt{0,48 R_B b h^2 \frac{F_{Bü} \beta_{ss}}{s}} - 0,8 F_{Bü} \beta_{ss}$	=	$\theta \cdot b h$
ACI-318 (Gl. 76)	:	$Q = \frac{0,85 F_{Bü} \beta_{ss} h}{s} + 0,45 \sqrt{\beta_{zyl}} \cdot b h$	=	$\theta \cdot b h$

Als Bezugsquerschnitt wurde gewählt: $b = 25 \text{ cm}$; $h = 45 \text{ cm}$; $F_{Bü} = 1,56 \text{ cm}^2$;
 $s = 12 \text{ cm}$ und 6 cm ; $\beta_{ss} = 5000 \text{ kp/cm}^2$. Für die gewählten Betongüten Bn 150, Bn 250 und Bn 350 rechnen sich die Beiwerte ω und θ folgendermaßen aus:

		Bn 150		Bn 250		Bn 350	
		S = 12 cm	S = 6 cm	S = 12 cm	S = 6 cm	S = 12 cm	S = 6 cm
DIN 1045	ω	29,8		44,7		59,6	
	θ	18,6	37,1	18,6	37,1	18,6	37,1
CEB/FIP	ω	17,0		26,7		37,3	
	θ	24,2	43,8	25,3	45,0	26,3	46,0
SNIP-62	ω	25,0		40,0		52,5	
	θ	29,8	44,4	39,1	57,6	45,7	66,8
ACI 318/71	ω	25,3		32,7		38,8	
	θ	27,2	49,3	28,7	50,8	29,9	52,0

An dieser Tabelle ist folgendes auffällig: Die in DIN 1045 angegebenen oberen Grenzen des Rechenwertes der Schubspannungen sind im Vergleich zu anderen Bestimmungen höher angesetzt. Dagegen liegt die nach der vorhandenen Schubbewehrung ausgerechnete Schubtragfähigkeit vergleichsweise niedriger; sie ist ferner, im Gegensatz zu den anderen Bestimmungen, von der Betongüte unabhängig, weil die gesamte Querkraft allein der Bewehrung zugewiesen wird. Da, wie die Versuchserfahrung zeigt, der ungerissen gebliebene Beton einen Teil der Querkraft aufnehmen kann, dürfte es möglich sein, diesen Betrag noch hinzuzufügen (wie z.B. in den amerikanischen Bestimmungen).

Die obere Grenze (2400 kp/cm^2) der zulässigen Stahlspannung dürfte auch abgeschafft werden, denn sie führt zu einer zusätzlichen Verringerung der Rechen-
tragfähigkeit.

3.6.5.2 CEB/FIP-Richtlinien:

1. Sämtliche festgesetzten oberen Grenzen der Rechenwerte der Schub- sowie der Torsionsschubspannungen sind noch niedriger als in DIN 1045 (s. hierzu auch die Bilder 50 bis 53), daher dürften sie derselben Kritik unterliegen. Insbesondere sind die in Gln. (54) und (61) jeweils an zweiter Stelle angegebenen Grenzen ($0,20 R'_b$ bzw. $0,18 R'_b$) wesentlich niedriger und dürften erhöht werden, da hierdurch für normale Betongüten sich zu niedrige Rechenwerte der Tragfähigkeiten ergeben.
2. Bei der Bemessung auf Querkraft wird hier ein Teil dem Beton zugewiesen, so daß die hieraus errechneten Schubtragfähigkeiten - im Gegensatz zu den sich nach DIN 1045 ergebenden - etwas größer ausfallen und den nach den amerikanischen Bestimmungen errechneten Werten näher kommen.
3. Es wurden keine unteren Grenzen für die Rechenwerte der Schub- und der Torsionsschubspannung festgelegt (Fall A), unter denen eine Bügelbewehrung nicht nachzuweisen ist, wie z.B. in DIN 1045. Für praktische Bemessung ist dies jedoch wünschenswert.

3.6.5.3 UdSSR-Bestimmungen:

1. Der aus Gl. (68) durch Extrapolation errechnete Wert von M_0 ist etwas größer als der Wert, der sich ebenfalls aus der in den Bestimmungen angegebenen Formel für die Biegetragfähigkeit ergibt. Dies verursacht einen "Sprung" in der unmittelbaren Nähe der $\frac{M}{M_0}$ Achse.
2. Das bei unsymmetrisch bewehrten Querschnitten unter vorherrschender Torsionsbeanspruchung vorkommende Bruchmodell 3 (Druckzone unten) wird hier überhaupt nicht berücksichtigt. Dies hat zur Folge, daß bei großen $\frac{T}{M}$ Verhältnissen (sowie bei reiner Torsion) die Bemessung solcher Balken auf der unsicheren Seite liegt, wie auch aus dem Bild 50 ersichtlich ist.
3. Die Torsion-Querkraft-Interaktion ist linear wie bei den CEB/FIP-Richtlinien.

3.6.5.4 Amerikanische Bestimmungen ACI 318-71:

1. Es ist hier überhaupt keine Einwirkung zwischen T und M vorgesehen. Dies führt dann zu unterschiedlichen Sicherheitsfaktoren, je nachdem wie groß das T/M-Verhältnis ausfällt. Unter Umständen können die hierdurch errechneten Werte sogar auf der unsicheren Seite liegen (besonders bei symmetrischer Bewehrung und großen T/M-Verhältnissen!).
2. Hinsichtlich der Bemessung auf Querkraft liegen die amerikanischen Bestimmungen zu stark auf der sicheren Seite im Gegensatz zu den russischen, wie auch aus Bild 53 hervorgeht.

4. Über die für die Torsionstragfähigkeit wichtigen Einflußfaktoren und Über die Aufstellung einer empirischen Formel

Die Faktoren, welche das Verhalten und die Tragfähigkeit des unter kombinierter Torsion beanspruchten Balkens beeinflussen, sind zahlreich und von unterschiedlicher Natur. Unsere bisher gewonnenen Torsionserkenntnisse reichen dafür nicht aus, die Wirkungsweise aller Einflußparameter zu beschreiben. Aus diesem Grunde wurden im folgenden nur die Haupteinflußgrößen erfaßt, um ihre Wirkungsweise an Hand der vorhandenen Versuchsergebnisse aufzuklären. Die Art und Weise, in der die verschiedenen Bemessungsformeln diese Einflußgrößen erfassen, wird durch Bilder veranschaulicht. Bei dieser Beschreibung beschränken wir uns auf rechteckige Querschnitte unter kombinierter Beanspruchung.

4.1 Betonfestigkeit

Der Einfluß der Betongüte auf die Balkentragfähigkeit wurde von Anfang an erkannt, indem man in den Bestimmungen die zulässigen Werte der Torsionsspannung vorwiegend nach der Betongüte festlegte. Im Bild 20 ist die angebliche Torsionsspannung T/b^2d in Abhängigkeit von der Zylinderfestigkeit (bzw. der Prismendruckfestigkeit) des Betons aufgetragen. Aus Versuchsergebnissen wurden die Balken ausgesucht, bei denen die übrigen Parameter festgehalten wurden. Es wurden dann die wichtigsten Bemessungsformeln überlagert, so daß man hieraus sehr leicht ersehen kann, daß die verschiedenen Theorien diesen Einfluß praktisch vernachlässigen, da sie als Voraussetzung einen unterbewehrten Querschnitt zugrunde legen und vorzeitiges Betonversagen als vermeidbar ansehen. Laut amerikanischen Stahlbetonbestimmungen ACI-318 wäre das Torsionsmoment proportional zu $\sqrt{\beta_p}$. Dagegen entnimmt man aus Bild 20 eine schwächere Abhängigkeit; T etwa proportional zu $(\beta_p)^{0,2}$. Es ist aber offenbar klar, daß für überbewehrte Balken, bei denen die Festigkeit der Betondruckzone für die Tragkapazität eine entscheidende Rolle spielt, die Betongüte einen noch ausgeprägteren Einfluß ausüben kann. Die meisten praktischen Balken wurden jedoch unterbewehrt bemessen.

4.2 Längsbewehrung

Aus Versuchsbeobachtungen ist festgestellt worden, daß allein die Längsbewehrung, außer einer kleinen Verbesserung der Balkendehnbarkeit, zur Balkentragfähigkeit nur unwesentlich beitragen kann, da offenbar der räumliche Zugkraftvektor der schiefen Bruchfläche eine orthogonale Bewehrung benötigt. Fällt die Querbewehrung aus, so unterscheidet sich die Traglast nur gering von einem unbewehrten Balken, außer daß bei dickeren Längsstäben ein kleiner Beitrag der Dübelkraft hinzukommt. Aus Versuchsergebnissen bei reiner Torsion wurde bei einer Erhöhung des Längsbewehrungsgehalts von 0 % auf 5,36 % ein Tragfähigkeitszuwachs von nur 15 % festgestellt. Ist dagegen eine ausreichende Bügelbewehrung vorhanden, so übt nicht nur die Menge, sondern auch die Verteilung der Längsbewehrung einen Einfluß auf die Tragfähigkeit aus. Wenn zum Beispiel eine stärkere untere Bewehrung vorliegt, so wird beim Vorhandensein eines kleinen Biegemomentes das Torsionsmoment erhöht, obwohl bei symmetrisch bewehrten Querschnitten das Gegenteil der Fall ist. Es kommt auch darauf an, welche von den Längseisen beim Bruch auf Zug beansprucht werden. So spielt z. B. für die Balkentragfähigkeit bei dem Bruchmodell 1 die untere, beim Modell 2 die seitliche und beim Modell 3 die obere Bewehrung die wichtige Rolle.

Das unterschiedliche Verhalten der symmetrisch und der unsymmetrisch bewehrten Balken ist leicht zu erklären. Ein Torsionsmoment verursacht gleiche Zugspannung in aller Bewehrung, während ein positives Biegemoment in der unteren Bewehrung Zug-, in der oberen dagegen eine Druckspannung erzeugt. Demzufolge wird in einem symmetrisch bewehrten Querschnitt die obere Bewehrung nicht völlig ausgenutzt, und die Tragfähigkeit wird durch die unten vorhandene Bewehrung bestimmt. Verteilt man nun die gleiche Gesamtbewehrung neu, so daß die untere Bewehrung stärker ausfällt und sämtliche Eisen ausgenutzt werden, so wird offenbar die Tragfähigkeit erhöht. Das obige trifft natürlich nur für die unterbewehrten Querschnitte zu, bei denen die Bewehrung zum Fließen kommt.

Der Einfluß des Längsbewehrungsgrades ist im Bild 21 veranschaulicht. Die von den verschiedenen Theorien aufgezeigte Abhängigkeit ist hierbei deutlich zu erkennen; man kann sie ferner mit der im Versuch beobachteten Tendenz vergleichen. Zu diesem Zweck sind in diesem Bild die Versuchsergebnisse von Hsu unter reiner Torsion eingetragen, bei denen lediglich die Längsbewehrung

variiert wurde. Streng genommen ist dieser Vergleich nicht absolut richtig, da für die Auswertung der Theorien ein T/M-Verhältnis gleich 0,5 angenommen wurde, während die überlagerten Versuchsergebnisse unter reiner Torsion entstanden, weil zwecks dieser Untersuchung in der Literatur keine geeigneten Versuchsergebnisse unter kombinierter Torsion vorhanden sind. Trotzdem kann man aus diesem Bild entnehmen, daß alle Theorien diesen Einfluß etwa ähnlich erfassen; einige liegen hierbei vergleichsweise auf der sicheren Seite.

4.3 Querbewehrung

Die Natur der schiefen Bruchfläche (s. z.B. Bilder 3 und 4) und der entsprechende räumliche Zugkraftvektor machen es nicht nur nötig, daß alle Balkenseiten mit Querbewehrung versehen sein müssen, sondern auch, daß alle Seiten des Spiralrisses von dieser Bewehrung getroffen werden. Bei der Torsionsbewehrung muß es sich also um eng gestellte umschlossene Bügel handeln. Bei der Untersuchung des Einflusses der Querbewehrung soll man daher nicht nur von der Menge der Bewehrung, sondern auch vom Bügelabstand ausgehen.

Die Quer- sowie die Längsbewehrung werden erst durch das Erscheinen und das weitere Öffnen der Torsionsrisse beansprucht; beide Bewehrungen können daher die Rißlast und die anfängliche Rißneigung kaum beeinflussen, was auch aus Versuchen hervorgeht. Bei schwach bewehrten Balken fällt der Beitrag der Bewehrung zur Traglast etwa proportional zur gesamten Torsionsbewehrung aus (einschließlich der Längs- sowie der Querbewehrung). Dagegen nähert sich die Tragfähigkeitserhöhung bei stärker werdendem Querbewehrungsgehalt einem konstanten Wert, da offenbar der Balken auf Grund des Betonversagens zu Bruch geht, bevor die Bewehrung zum Fließen kommen kann. Es wurde auch festgestellt, daß schon ein kleiner Querbewehrungsgehalt ($\frac{F_{ss}^{ss}}{b_f \cdot s} = \text{etwa } 4,0 \text{ kg/cm}^2$) die Tragfähigkeit des Balkens bei kombinierter Beanspruchung wesentlich erhöht.

Um einen spröden Bruch zu vermeiden, hat man in der Literatur untere Grenzen für den Längsbewehrungsgehalt sowie den Querbewehrungsgehalt angegeben. Zusätzlich hat man einen Mindestabstand der Längseisen und der Bügel vorgeschlagen; z. B. nach ACI-318 darf der Bügelabstand nicht kleiner als $\frac{1}{4}(b_1 + d_1)$

oder 30 cm sein. Eine volle Ausnutzung beider Bewehrungsarten bedarf ferner nicht nur einer oberen Grenze der Gesamtbewehrung, sondern auch einer gewissen Verteilung dieser Bewehrung in den zwei Richtungen. Das erstere hat man in der englischen Literatur als "Balanced total volume percentage", das letztere als "Balanced Volume Ratio" bezeichnet. Da nach dem Öffnen der Risse eine gewisse Umlagerung der Zugkräfte von Längs- auf Querbewehrung und umgekehrt möglich ist, stellt das "Balanced Volume Ratio" keinen scharf festgelegten Wert dar, sondern es mag innerhalb eines Bereiches schwanken. Offenbar hängen die beiden Grenzen nicht nur mit den Querschnittsabmessungen und der Betongüte zusammen, sondern auch mit den Beanspruchungskombinationen. Man hat hierzu in der Literatur verschiedene Vorschläge unterbreitet.

Der Einfluß der Querbewehrung ist im Bild 22 quantitativ erfaßt, indem die wichtigen Theorien gegenübergestellt worden sind, insoweit sie diesen Einfluß erfassen. Man sieht, praktisch alle Autoren gehen davon aus, daß die Torsionsbewehrung allein nur wenig beiträgt. In der Literatur sind wiederum keine Versuchsergebnisse vorhanden, die diesen Einfluß erfassen und so zum Vergleich herangezogen werden konnten. Die in diesem Bild eingetragenen Versuchsergebnisse nach Hsu sind unter reiner Torsion gewonnen worden und vermitteln deshalb keinen geeigneten Vergleich.

Auf Grund dieser Überlegung wurde das Bild 23 angefertigt, das den Einfluß des gesamten Bewehrungsgehaltes erfaßt. Als Parameter wurde die Größe $\sqrt{\mu_L \mu_{Bü}}$ gewählt, wobei μ_L bzw. $\mu_{Bü}$ den Bewehrungsprozentsatz in der Längs- bzw. der Querrichtung darstellen. Die wichtigen Theorien sind hier aufgetragen. Aus dem Bild sieht man, daß alle Theorien etwa eine lineare Proportionalität aufweisen, solange μ_L und $\mu_{Bü}$ sich voneinander nicht wesentlich unterscheiden. Diese Abhängigkeit ist allerdings bei McMullen-Warwaruk und Lampert-Thürlimann wesentlich stärker. Zum Vergleich sind wieder die unter reiner Torsion gewonnenen Versuchsergebnisse von Hsu eingetragen worden. Obwohl diese für kombinierte Torsion keinen direkten Vergleich ermöglichen, ist zu ersehen, daß die Abhängigkeit die gleiche ist. Somit ist klar, daß der Einfluß der Bewehrung im allgemeinen recht zufriedenstellend erfaßt wurde. Nur bei stark bewehrten Balken ist es möglich, daß McMullen-Warwaruk und Lampert-Thürlimann die Traglast überschätzen. Hierzu haben sie aus diesem Grunde obere Grenzen des gesamten Bewehrungsgehaltes dargelegt.

4.4 Das Torsion-Biegemoment-Verhältnis

Das T/M-Verhältnis spielt bei der Balkentragfähigkeit eine wichtige Rolle, wie zum Beispiel das Momentenschubverhältnis $\frac{M}{Q h}$ bei der Schubtragfähigkeit. Betrachtet man das Gleichgewicht des im Bild 9 aufgezeigten Balkenteils, so muß die Druckkraft der Betondruckzone gegenüber der Zugkraft der Bewehrung im Gleichgewicht stehen. Die Betondruckkraft wird zusammengesetzt aus der vom Biegemoment verursachten Normalspannung und der aus Torsion bzw. Querkraft erzeugten Schubspannungen. Wenn unter der gleichzeitigen Einwirkung der Normal- und der Schubspannungen die zweiachsige Betonfestigkeit erreicht wird, so stellt diese den Grenzzustand dar. In dem in der Druckzone herrschenden plastischen Zustand kann man die Normalspannung zu $\frac{M}{bd^2}$, die aus Torsion verursachte Schubspannung zu $\frac{T}{b^2 d}$ und die aus Querkraft erzeugte Schubspannung zu $\frac{Q}{b d}$ proportional ansetzen. Fällt zunächst die Querkraft aus, so wird die Betonfestigkeit der Druckzone durch das Verhältnis $\frac{T}{M} \cdot \frac{d}{b}$ bestimmt.

Aus der obigen Überlegung geht also hervor, daß für rechteckige Stahlbetonbalken, die unter Torsion und Biegung beansprucht werden, die Traglast einerseits durch das T/M-Verhältnis, andererseits aber durch die Querschnittsschlankheit b/d bestimmt wird. Es scheint deshalb zweckmäßiger zu sein, das Torsion-Moment-Interaktionsdiagramm als Interaktion der Spannungen aufzustellen, sonst wäre wahrscheinlich ein derartiges Diagramm, streng genommen, nur für ein bestimmtes b/d -Verhältnis gültig. Die amerikanischen Stahlbetonbestimmungen ACI-318 gehen auch von einer Interaktion der Spannungen aus.

An Hand der bisherigen Versuchserfahrung kann man den Einfluß des Torsionsmomentenverhältnisses auf das Verhalten und die Tragfähigkeit des Balkens folgendermaßen beschreiben:

1. Bei relativ kleinen T/M-Werten (bis etwa 0,20) ist praktisch keine Abminderung der reinen Biegetragfähigkeit festzustellen, und die meisten Balken versagen in diesem Bereich vorwiegend auf Biegung.
2. Bei großen T/M-Werten (etwa über 1,0) ist der Einfluß des Torsionsmomentes so stark, daß der Balken auf Bruchmodell 2 versagt. Die Tragfähigkeit wird praktisch gleich der reinen Torsionstragfähigkeit. Selbstverständlich

liegt dieser Übergangspunkt nicht eindeutig fest, er wird von verschiedenen Faktoren beeinflusst, z. B. Balken mit $b/d = 0,5$ und nur Längsbewehrung zeigten diesen Übergang bei T/M zwischen 0,25 und 0,5 auf, während derselbe Übergang bei $b/d = 1,0$ mit T/M zwischen 1 und 1,5 lag. Längs- und Bügelbewehrung haben dabei entgegengesetzte Wirkung. Es ist aber klar, daß das Vorhandensein eines kleinen Biegemomentes praktisch keine Abminderung der reinen Torsionstragfähigkeit verursacht.

3. In den dazwischen liegenden Bereichen wird die größte Einwirkung der zwei Beanspruchungsarten deutlich zu erkennen sein. Wie schon erwähnt, wird bei symmetrisch bewehrten Balken die Torsionstragkapazität unter den Wert der reinen Torsionstragfähigkeit abgemindert, offenbar weil die untere Bewehrung völlig, aber die obere Bewehrung sowie der Beton nur teilweise ausgenutzt werden. Dagegen liegt bei einer stärkeren unteren Bewehrung die Torsionstragfähigkeit tatsächlich über dem bei reiner Torsion vorhandenen Wert. Es kommt hier wiederum zur Bruchart 3.

Der Einfluß des T/M -Verhältnisses ist im Bild 24 aufgezeigt. Bei großen T/M -Verhältnissen wird das Bruchmodell 3 kritisch, wenn es sich um einen unsymmetrisch bewehrten Querschnitt handelt. Die Theorien von Lessig, Lampert-Thürlimann und McMullen-Warwaruk liegen nahe beieinander, dagegen liegt die Collinsche Theorie auf der sicheren Seite. Die ebenfalls im Bild aufgetragenen Versuchsergebnisse liegen zwischen den beiden, zeigen aber deutlich das Kritischwerden der Bruchart 3 bei höheren T/M -Verhältnissen.

4.5 Das Torsionsquerkraftverhältnis

Die bei kombinierter Torsion versagenden Balken gehen hauptsächlich auf zwei Arten zu Bruch. Beim Modell 1 bildet sich eine deutlich erkennbare Druckzone an der Balkenoberseite. In dieser Druckzone sind die aus der Querkraft verursachten Schubspannungen praktisch Null, so daß für die Festigkeit der Druckzone und somit für die Traglast lediglich die Einwirkung von Normal- und Torsionsspannungen maßgebend wird. Also bleibt in diesem Fall der Einfluß des Torsionsquerkraftverhältnisses ($\frac{T}{Q \cdot b}$) unbedeutend. Bei der Bruchart 2 erscheint aber die Druckzone auf der Balkenseite, wo die Torsions- und Biegeschubspan-

nungen entgegengesetzt wirken, dagegen die Biegenormalspannungen durchschnittlich klein sind. Diese Bruchart kommt ferner nur bei den Balken oder in den Bereichen vor, wo das Biegemoment verhältnismäßig klein ausfällt. Aus diesen Gründen hat das Biegemoment für die Betonfestigkeit der Druckzone und dadurch für die Tragfähigkeit sekundären Einfluß. Man kann daher in diesem Fall den Einfluß des T/M-Verhältnisses außer Acht lassen. Aus dieser Überlegung heraus darf man bei sämtlichen Balken die Einflüsse der zwei Verhältnisse $\frac{T}{M}$ und $\frac{T}{Q \cdot b}$ getrennt betrachten, je nachdem, auf welche Art der Balken zu Bruch geht bzw. berechnet wird.

Die Einwirkung von Torsion und Querkraft ist noch nicht endgültig aufgeklärt worden, da hierfür nicht genügend Versuchsergebnisse vorliegen. Es geht hier darum, die Versuchsanordnung so einzurichten, daß der Balken möglichst nah am Momentennullpunkt zum Bruch geführt werden kann, damit das Biegemoment von sekundärem Einfluß bleibt. Derartige Versuchsergebnisse gibt es sehr wenige, und sie sind meistens an Balken ohne Bügelbewehrung durchgeführt. Daher addiert man sicherheitshalber die für Torsion nötige Bewehrung zu der, die für die Querkraft notwendig ist.

Unter Einwirkung von Torsion und Querkraft gehen die meisten Balken auf Modell 2 zu Bruch (Bild 25 a), obwohl sich nach Collins und anderen [52] bei kleinen

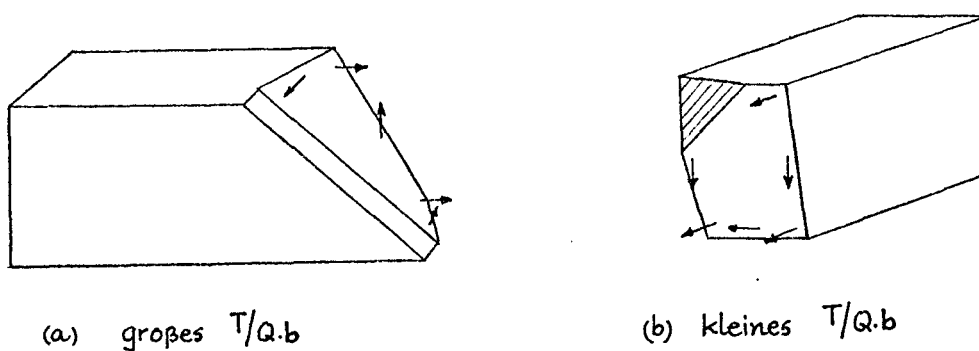


Bild 25 Bruchmodelle nach Collins et. al.

T/Qb-Verhältnissen eine dreieckige Betondruckzone bilden kann. Bei den Versuchen wurde ferner folgendes beobachtet:

1. Bei kleinen T/Q_b -Verhältnissen (etwa 0,3 bis 0,4) ist praktisch keine Einwirkung deutlich geworden, und die reine Schubtragfähigkeit wird nicht vermindert.
2. Bei T/Q_b -Verhältnissen etwa größer als 1,0 wird die reine Torsionstragfähigkeit kaum vermindert.
3. Zunehmender Längsbewehrungsgehalt erhöht sowohl die Torsionstragfähigkeit als auch die Schubtragfähigkeit des Balkens, letztere in stärkerem Maße im Vergleich mit der ersten. Hierdurch wird die Einwirkung im dimensionslosen Interaktionsdiagramm $\frac{T}{T_0} - \frac{Q}{Q_0}$ bei zunehmender Längsbewehrung noch ausgeprägter.
4. Bei T-Balken wurde die Schubtragfähigkeit durch kleine Torsionsmomente kaum beeinflusst, bei L-Balken dagegen erniedrigte auch das Vorhandensein kleinerer Torsionsmomente die Schubtragfähigkeit.
5. Bei zunehmenden T/Q_b -Verhältnissen verschwindet der Einfluß der Längsbewehrung auf die Tragfähigkeit, und zwar bei T/Q_b größer als etwa 2 bis 3.
6. Bei kleinen T/Q_b -Verhältnissen fällt ein L-Balken nicht viel stärker aus als ein vergleichbarer Rechteckbalken. Gegenüber einer Torsionsspannung sind ferner die L-Balken viel empfindlicher als die T-Balken, die einen verschiedenen Bruchmechanismus aufweisen.

Das T/Q_b -Verhältnis bedeutet nichts anderes als die Einwirkung der Torsions- und der Biegeschubspannungen in der Betondruckzone. Um seinen Einfluß auf die Traglast zu veranschaulichen, wurde Bild 26 aufgestellt, in dem die angebliche Torsionsspannung in Abhängigkeit vom T/Q_b -Verhältnis aufgetragen wurde. Überlagert wurden die Rechenwerte nach den wichtigen Torsionstheorien, um zu sehen, wie die verschiedenen Autoren diesen Einfluß erfassen. Die zu diesem Vergleich sehr geeigneten Versuchswerte von Klus [50], bei denen das Biegemoment im Bruchbereich eine sekundäre Rolle spielte, wurden ebenfalls in dieses Bild eingetragen. Man sieht, wie alle Theorien in einem ziemlich engen Bereich liegen; die Collinsche Formel liefert die besten Ergebnisse. Unsymmetrisch bewehrte und vorwiegend auf Torsion beanspruchte Querschnitte können jedoch hier auch nach dem Modell 3 versagen.

4.6 Die Querschnittsform

Die meisten torsionsbeanspruchten Balken der Praxis sind entweder T-, I- und L-Balken (bei Hochbauten) oder aber Hohlkasten (bei Brücken). Balken mit derartiger Querschnittsform wurden bis jetzt relativ wenig untersucht; über T-, I- und L-Balken sind Versuche in der UdSSR und in den U.S.A. (University of Texas) und über Hohlquerschnitte in der Schweiz (EMPA Zürich) durchgeführt worden. Die aus diesen Untersuchungen hervorgehenden Schlußfolgerungen sind im folgenden kurz zusammengefaßt:

1. Für I-förmige Querschnitte darf man ein dem rechteckigen Querschnitt ähnliches Bruchschema annehmen (Bruchart 1 sowie Bruchart 2). Der Hauptunterschied liegt hierbei darin, daß die Rißneigung fast immer gleich 45° ausfällt und daß sie keine eindeutige Funktion des T/M-Verhältnisses ist. Vielmehr folgen hier die Risse den Hauptspannungstrajektorien.
2. Bei T-Balken fällt der Torsionswiderstand des Flansches so aus, daß ein T/Q_b -Verhältnis gleich 0,42 den Schubwiderstand des Balkens um weniger als 10 % erniedrigt. Gegenüber den Rechteckbalken zeigten T-Balken bei größeren T/M-Verhältnissen (größer als 0,20) eine Abminderung der Biegetragfähigkeit um etwa 30 %. Dagegen war bei $T/M < 0,10$ praktisch kein Unterschied zu erkennen. Die Torsionsfähigkeit wird mit zunehmender Flanschbreite erhöht, und zwar bis etwa $M/M_0 = 0,6$. Bei $M/M_0 \geq 0,80$ ist dagegen keine weitere Erhöhung festzustellen, wenn der Flanschüberhang bei T-Balken über sechsfach, bei L-Balken dagegen über vierfach so groß ausfällt wie die Plattendicke.
Das Verhalten der T-Balken ist im Vergleich zu dem des L-Balkens besser.
3. Bei L-Balken wird die Schubtragfähigkeit sogar durch das Vorhandensein eines kleinen Torsionsmomentes vermindert. Die Armierung des Flansches gegen Biegung erhöht die Balkentragfähigkeit nicht.
4. Die am EMPA-Zürich (Torsion + Biegung) sowohl an der "PCA Structural Laboratory" (Torsion) durchgeführten Versuche haben eindeutig ergeben, daß die Tragfähigkeit eines Hohlkastenquerschnittes gleich derjenigen des entsprechenden Vollquerschnittes ist, so daß man von einem Beitrag des Betonkerns überhaupt nicht sprechen kann. Lediglich sind die Verformungen des Vollquerschnittes bis zum Fließbeginn kleiner. Bild 27 ist in diesem Zusammenhang aus der Arbeit von Hsu [54] auszugsweise vorgelegt, um dies anschaulich zu machen.

Aus dem oben Erwähnten wird klar, daß der Einfluß der Querschnittsform unzureichend und nur qualitativ erfaßt wurde. Es sind zwar auf Grund einzelner Versuchsdaten empirische Bemessungsformeln aufgestellt worden, aber keine theoretischen Arbeiten. Lediglich Lessigsche Ausdrücke bleiben die einzigen Bemessungsformeln für I-Querschnitte.

4.7 Eine empirische Formel zur Tragfähigkeitsberechnung

Vor kurzem wurde am Institut für Baustoffkunde und Stahlbetonbau der Technischen Universität Braunschweig eine eingehende Studie über die Wirkungsweise der für Torsion wichtigen Einflußparameter verfaßt, in der etwa 800 Versuchsergebnisse systematisch ausgewertet wurden. Demzufolge wurde eine empirische Formel zur Tragfähigkeitsberechnung von Rechteck-, T- und L-Balken unter kombinierter Torsion vorgeschlagen [104], die zuverlässige Ergebnisse liefert und ferner für praktische Bemessung geeignet ist. Diese Formel lautet:

$$\tau_u = \frac{2 T}{\sum \left[x^2 y \left(1 - \frac{1}{3} \frac{x}{y} \right) \right]} = \frac{5,5 \beta_p^{0,2} + \frac{2}{3} \sqrt{\mu_L^* \beta_{SL}^*} (1 + \sqrt{\mu_{Bü} \beta_{ss}})}{\sqrt{1 \pm \frac{\sigma_u^2}{\tau_u^2} \pm 6 \frac{v_u^2}{\tau_u^2}}} \quad (85)$$

$$v_u = \frac{Q}{b_0 d}$$

$$\sigma_u = \frac{M}{b d^2}$$

Hierbei bedeuten:

μ_L^* bzw. β_{SL}^* den Bewehrungsgrad bzw. die Streckgrenze der auf der Zugseite liegenden Längseisen. Die in der Formel (85) im Nenner erscheinenden negativen Vorzeichen sind dann zu benutzen, wenn bei positivem Moment das Bruchmodell 3 eintritt. Wird dagegen Modell 2 maßgebend, so ist das zweite Glied im Nenner gleich Null zu setzen.

Bei der Anwendung der Torsionsformel (85) ist somit eine Vorkenntnis der kritischen Bruchart nötig. Bei reiner Torsion kann das Bruchmodell 1, 2 oder 3 eintreten, je nach-dem, ob der Beitrag (Fließkraft mal dem Hebelarm) der

unteren, der seitlichen bzw. der oberen Bewehrung der kleinste ist. Bei kombinierter Torsion kann man die Bruchart 3 nach dem von Collins [52] vorgeschlagenen einfachen Kriterium abtrennen; dies geschieht, wenn

$$\left. \begin{aligned} \frac{M}{M_o} &< \frac{1}{2} \left(1 - \frac{F_{eo} \beta_{eso}}{F_{eu} \beta_{esu}} \right) \quad \text{oder} \\ \frac{Q \cdot a}{M_o} &< \frac{1}{2} \left(1 - \frac{F_{eo} \beta_{eso}}{F_{eu} \beta_{esu}} \right) \end{aligned} \right\} \quad (86)$$

ist. Zur Trennung der Modelle 1 und 2 wurde das folgende Kriterium mit Hilfe des Bruchkriteriums der Hauptspannungshypothese abgeleitet. Demnach wird Modell 2 kritisch, wenn

$$\frac{M}{T} < \frac{\frac{9}{4} \left(\frac{Qb_o}{T} \right)^2 + 3 \frac{Qb_o}{T} \left(3 + 1,8 \frac{b_o}{d} \right) + 5,76 \left(1 - \frac{b_o^2}{d^2} \right)}{\frac{b_o}{d} \left(9 \frac{Qb_o}{T} + 10,8 \frac{b_o}{d} + 18 \right)} \quad (87)$$

Formel (85) geht von einer kreisförmigen Interaktion zwischen T, M bzw. Q aus. Für Bemessungszwecke muß man die Verhältnisse $\frac{T}{M}$ bzw. $\frac{T}{Qb_o}$ im kritischen Querschnitt ermitteln.

5. Über die Verformung und die Torsionssteifigkeit

Die Beziehung Moment-Krümmung und die Biegesteifigkeit im gerissenen Zustand bei reiner Biegung wurde in den letzten Jahren sehr gründlich untersucht, so daß die hierzu nötigen zuverlässigen Rechenformeln uns schon zur Verfügung stehen. Bei Biegung und Querkraft hat man bei vollwandigen Tragwerken die Schubverformungen im allgemeinen vernachlässigt, obwohl Versuchsergebnisse deutlich zeigen, daß nach dem Auftreten der Schubrisse die Schubverformungen im Vergleich zu den Biegeverformungen nicht mehr so klein bleiben. Mit Hilfe der Fachwerkanalogie hat Dilger [40] die Schubverformungen rechnerisch erfaßt, indem er die gesamte Verformung des Fachwerkes infolge einer Querkraft ausrechnete.

Sehr gering sind im Vergleich unsere Kenntnisse über die Verformung und die Steifigkeit des Balkens infolge reiner oder kombinierter Torsion. Auf experimentelle Weise hat man die Torsionsmoment-Verwindung-Charakteristik erforscht und qualitative Schlußfolgerungen gezogen, aber eine theoretische Untersuchung der Verformung und der Torsionssteifigkeit fehlt uns praktisch noch. Die offenbare Forschungsanstrengung der letzten Jahre über die Balkentragfähigkeit muß aber in der Zukunft notwendigerweise auf das Gebiet der Torsionsverformung erweitert werden, denn wir müssen nicht nur die Grundlagen der Bemessung, nämlich die Ermittlung der Schnittkräfte, vor allem für statisch unbestimmte Tragwerke, überprüfen, sondern es ^{besteht} ~~bedeutet~~ auch das Bedürfnis, zu wirklichkeitsnahen Rechenwerten für die Verformungen zu gelangen, um rationale Grenzzustände zu beschreiben und die nötigen Sicherheitsfaktoren empfehlen zu können. Bisher hat man zu diesem Zweck die Steifigkeiten des ungerissenen Zustandes zu Grunde gelegt, aber die Versuchsergebnisse zeigen deutlich, daß - mindestens bei reiner Torsion - die Steifigkeit im Zustand II sehr stark abgemindert wird, so daß die so ermittelten Rechenwerte der Verformungen bei weitem nicht stimmen können. Die Fragen lauten also: Wie kann man die Wirkungsweise des Rißentstehens in Betracht ziehen, und wie soll ~~die~~ die effektive Größe des torsionsbeanspruchten Baugliedes in einem statischen System ausgerechnet werden? Erst wenn diese Fragen hinreichend beantwortet werden, kann man zur richtigen Dimensionierung des Systems realistische Werte der Torsionsmomente gewinnen.

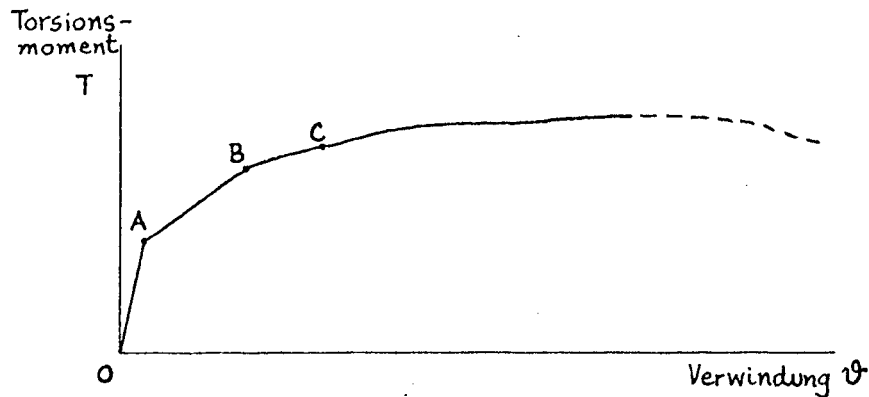


Bild 28 Typisches Torsionsmoment-Verwindungs-Diagramm

Bild 28 zeigt ein typisches aus Versuchen gewonnenes Torsionsmoment-Verwindungs-Verhältnis. Punkt A entspricht dem Erscheinen der Torsionsrisse; die Abhängigkeit bis zum Rißmoment ist nahezu linear. Mit dem Entstehen der Risse wird aber die Torsionssteifigkeit drastisch reduziert. Der Bereich BC entspricht etwa dem Fließen der Bewehrung bei unterbewehrten Balken. Demzufolge wird die Steifigkeit weiter herabgesetzt, so daß praktisch ohne Zunahme der Last die Verdrehung weiter anwächst, bis der Balken zu Bruch geht. An Hand der bisherigen Versuchsergebnisse kann man hinsichtlich der Torsionsverformung und der Torsionssteifigkeit folgende Schlußfolgerungen ziehen:

1. Die Verwindung nimmt mit der Abnahme der Betonfestigkeit geringfügig zu. Der Einfluß des Betons auf die Durchbiegung bei Torsion ist größer als bei reiner Biegung.
2. Die Steifigkeit nimmt mit dem Bewehrungsgrad zu. Der Einfluß der Längsbewehrung ist ähnlich wie auf die Biegesteifigkeit. Dagegen wirkt die Querbewehrung lediglich, wenn ein Torsionsmoment vorhanden ist. Die Bügel werden erst bei einem Abstand von 10 cm wirksam.
3. Die Torsionssteifigkeit nimmt sogar vor dem Entstehen der Risse ab. Das Verhältnis der Steifigkeit im Zustand II zur Steifigkeit im Zustand I bei reiner Torsion beträgt nur noch $\frac{1}{10}$ des Verhältnisses bei reiner Biegung. Hierdurch soll die Notwendigkeit einer genaueren Torsionssteifigkeitsermittlung unterstrichen werden. Andererseits wird aber ihre Vernachlässigung bei Momentenverteilung in Randunterzügen der üblichen Hochbauten gerechtfertigt.

4. Durch Addition eines gleichzeitig einwirkenden Biegemomentes wird die Torsionssteifigkeit ein wenig abgemindert. Dagegen scheint das Torsion-Querkraft-Verhältnis keinen wesentlichen Einfluß auszuüben.
5. Bei konstant beibehaltener Querschnittsfläche ist ein Einfluß der Querschnittsschlankheit b/d auf die Steifigkeit kaum spürbar. Man kann daraus entnehmen, daß bei Rechteckquerschnitten nur eine dünne äußere Zone im Bereich der Bewehrungsnetze die Torsionsbelastung übernimmt. Die Steifigkeit eines Vollquerschnittes fällt jedoch etwas größer aus als diejenige des entsprechenden Kastenquerschnittes.
6. Im Zustand II nimmt der Verwindungszuwachsgrad mit wachsender Last zu.

Im folgenden wird zunächst über den bisherigen Kenntnisstand hinsichtlich der Torsionsverformung und der Torsionssteifigkeit berichtet und die vorhandenen Arbeiten kurz zusammengefaßt.

5.1 Ungerissener Zustand

Im Zustand I kann man ohne nennenswerte Fehler den Baustoff als homogen und isotropisch annehmen, der ein lineares Spannungsdehnungsdiagramm hat. Der Beitrag der Bewehrung ist im allgemeinen vernachlässigbar klein außer dem Unterschied des Schubmoduls. Man kann hier also der Steifigkeitsberechnung die Elastizitätstheorie zu Grunde legen, d. h. die Verwindung schreibt man zu:

$$\vartheta = \frac{\varphi}{L} = \frac{T}{GK_I} \quad (88)$$

Das Torsionsträgheitsmoment K_I ist eine Funktion der Querschnittsabmessungen, während der Schubmodul G lediglich von den Materialeigenschaften abhängt. Formeln für K_I - auf der Elastizitätstheorie beruhend - kann man in Handbüchern finden. Vernachlässigt man den Einfluß des Schubmodulunterschiedes zwischen der Bewehrung und dem Beton auf die Torsionssteifigkeit, so beträgt der Fehler höchstens 18 % bei einem Längsbewehrungsgrad von 2,5 % oder 27 % bei einem Querbewehrungsgrad von 2,5 % und einem b/d -Verhältnis von 1,0. Er liegt dagegen bei etwa 17 % bzw. 18 % für b/d gleich 0,5.

Man ist sich auch darüber einig, daß das Vorhandensein einer gleichzeitig einwirkenden Axialdruckkraft die Torsionssteifigkeit kaum beeinflußt.

Um die Balkendurchbiegung auszurechnen, kann man ähnlicherweise die Krümmung $\frac{d^2w}{dx^2}$ aus der Formel

$$\frac{d^2w}{dx^2} = - \frac{M}{EI_I} \quad (89)$$

berechnen, indem man zur Bestimmung der Biegesteifigkeit den Vollbetonquerschnitt bzw. den idealisierten Querschnitt zu Grunde legt. Ist die Balkenkrümmung bekannt, so kann man die Durchbiegung durch Integration ermitteln.

5.2 Gerissener Zustand

Mit dem Entstehen der Risse wird die Bewehrung zur Tragwirkung herangezogen, während der gerissene Beton praktisch nichts beitragen kann. Die Balkensteifigkeit besteht somit aus dem ungerissen gebliebenen Beton und der Längs- sowie der Querbewehrung. Bei stark bewehrten Balken, wo der Beitrag des ungerissenen Betons verhältnismäßig klein ausfällt, kann man das Biegeträgheitsmoment mit genügender Genauigkeit aus der Formel

$$I_{II} = F_{eu} k_z h^2 (1 - k_x) \quad (90)$$

ermitteln.

Bei normal bewehrten Balken wird die tatsächliche Biegesteifigkeit unter Anwendung des Ausdruckes I_I überschätzt, dagegen ist sie aber unter Anwendung von (90) unterschätzt. Daher hat man mehrmals für die Balkensteifigkeit (bzw. das Trägheitsmoment) bei reiner Biegung dazwischen liegende empirische Formeln vorgeschlagen; z. B. nach Branson [27] ist:

$$I_{II} = \left(\frac{M_R}{M}\right)^3 I_g + \left\{1 - \left(\frac{M_R}{M}\right)^3\right\} I_R < I_g \quad (91)$$

Hierin bedeuten:

$I_g = \frac{bd^3}{12}$, das Trägheitsmoment des Vollbetonquerschnitts

$I_R = F_e k_z h^2 (1 - k_x)$, das Trägheitsmoment des gerissenen Querschnitts unter Vernachlässigung des Betonbeitrages

M_R das Rißbiegemoment

F_e die Querschnittsfläche der Längsbewehrung

Es zeigt sich, daß die Formeln der Art (91) Rechenwerte liefern, die von den Versuchswerten innerhalb von $\pm 20\%$ abweichen.

Bezüglich des Verhaltens des torsionsbeanspruchten Balkens hat die Rißentwicklung zur Folge, daß das zweidimensionale Problem des Zustandes I in ein dreidimensionales Problem übergeht, indem die ungerissene Betondruckzone sowie der zwischen die Torsionsrisse fallende Beton zur Tragwirkung herangezogen werden kann. Die Berechnung der Torsionssteifigkeit im Zustand II ist daher eine sehr komplexe Aufgabe, schon bei reiner Torsion. Wie bei der Tragfähigkeitsberechnung ist man hier auch wiederum zwei Wege gegangen, und zwar: (1) An Hand der Fachwerkanalogie und (2) mit Hilfe des Bruchmodells. In der ersten Kategorie liegen die Arbeiten von Lampert-Thürlimann [59], Rahlwes [76] und Karlsson [88], in der zweiten die von Collins et. al. [52]. Bay [67, 74] verwendete einen anderen Zugang, indem er einen reduzierten Wert des Schubmoduls ausrechnete. Außerdem sind empirische Ausdrücke von u. a. Hsu [54, S. 261 bis 306] und Ramakrishnan und Vijayarangan [45] vorgelegt worden. Im folgenden wird über die wesentlichen Arbeiten kurz berichtet.

5.2.1 Lampert und Thürlimann [59]

Die von den Verfassern entwickelten Ausdrücke für die Steifigkeitsberechnung beruhen auf dem idealisierten Fachwerkmodell mit quadratischem Bewehrungskorb. Bei größeren T/M-Verhältnissen soll sich das Fachwerk auf allen Balkenseiten voll ausbilden, dagegen bleibt bei kleineren T/M-Werten die obere Druckseite relativ kompakt, da dort die Druckkraft infolge Biegung größer als die Zugkraft infolge Torsion ist. Auf Grund dieser Überlegung schlugen Lampert und Thürlimann verschiedene Formeln zur Berechnung der Balkensteifigkeit vor, und zwar:

Für $T/M \leq 1,0$ ist

$$\text{die Torsionssteifigkeit } GK_{II} = \frac{2 a_e^2 \bar{F}_{eu} E_e}{1 + \frac{M}{T} + \frac{s}{a_e} \cdot \frac{\bar{F}_{eu}}{F_{ss}}} \quad (92)$$

und die entsprechende Biegesteifigkeit

$$E I_{II} = \frac{2 a_e^2 \bar{F}_{eu} E_e}{1 + \frac{T}{M}} \quad (93)$$

Für $T/M > 1,0$ wird dagegen

$$G K_{II} = \frac{2 a_e^2 \bar{F}_{eu} E_e}{1 + \frac{M}{T} + \frac{\bar{F}_{eu}}{\bar{F}_{eo}} \left(1 - \frac{M}{T}\right) + \frac{2s}{a_e} \cdot \frac{\bar{F}_{eu}}{\bar{F}_{ss}}} \quad (94)$$

$$\text{und } E I_{II} = \frac{2 a_e^2 \bar{F}_{eu} E_e}{1 + \frac{T}{M} + \frac{\bar{F}_{eu}}{\bar{F}_{eo}} \left(1 - \frac{T}{M}\right)} \quad (95)$$

Hierbei bedeuten:

a_e der Abstand zwischen den Eckeisen bei einem quadratischen Bewehrungskorb und

E_e der E-Modul des Stahls.

Die Abweichungen der nach den obigen Gleichungen berechneten Werte der Biegesteifigkeiten von den gemessenen rühren im wesentlichen von der vernachlässigten Stauchung der Druckzone her. Sie nehmen mit wachsendem Torsionseinfluß infolge der kleiner werdenden Druckzone ab. Die Abweichungen der Rechenwerte der Torsionssteifigkeiten von den gemessenen Werten lassen sich dagegen vor allem durch die Vernachlässigung der oberen Schiebungen erklären, die einen erheblichen Beitrag annehmen können, der mit zunehmendem Torsionseinfluß steigt.

5.2.2 Rahlwes [76]

Zur Torsionssteifigkeitsberechnung im Zustand II (bei reiner Torsion) ersetzte Rahlwes den Stahlbeton-Rechteckbalken durch einen gleichwertigen Kastenquerschnitt, dessen Wanddicken er gleich 0,2 mal der Querschnittsbreite bzw. Querschnittshöhe ansetzte. Diesen gerissenen Kastenquerschnitt idealisierte er dann zu einem räumlichen Fachwerk mit einem verteilten orthogonalen Bewehrungsnetz. Die aus Torsion verursachte Balkenverdrehung errechnete er nun aus der Formänderungsarbeit des Ersatzfachwerkes und ermittelte somit die Torsionssteifigkeit im Zustand II zu:

$$\frac{1}{G K_{II}} = \frac{2,45}{E_b \cdot b^2 d^2} \left[8 \frac{(b^2 + d^2)}{bd} \cdot \frac{1}{\sin^2 2\alpha} + \alpha^2 \frac{E_b}{E_e} \cdot \frac{(b+d)^2}{bd} \cdot \frac{\mu_B + \mu_L \cdot \tan^4 \alpha}{\mu_B \mu_L \tan^2 \alpha} \right] \quad (96)$$

Hierin bedeuten:

E_b , E_e der E-Modul des Betons bzw. des Stahls

$$\alpha = \frac{b_1}{b} \approx \frac{d_1}{d}$$

$$\mu_B = \frac{2 F_{ss} \cdot \alpha (b + d)}{bd \cdot s}$$

$$\mu_L = \frac{2 F_{eL} \cdot \alpha (b + d)}{bd \cdot s_L}$$

wobei F_{eL} und s_L den Längsbewehrungsquerschnitt (des einzelnen Stabes) und den Abstand darstellen.

Das Verhältnis der nach Formel (96) errechneten Torsionssteifigkeit zur Steifigkeit im Zustand I nimmt mit wachsendem Bewehrungsgehalt zu und erreicht, für den Fall $\mu = \infty$, den Grenzwert 0,5. Das Verhältnis ist ferner von dem Seitenverhältnis b/d weitgehend unabhängig.

Die Arbeit von Rahlwes ist somit eine Erweiterung des Fachwerkmodells vom quadratischen auf den rechteckigen Querschnitt.

5.2.3 Karlsson [88]

Karlsson erweiterte die Fachwerkanalogie ferner auf Querschnitte allgemeiner Form unter reiner Torsion, und zwar auf ähnliche Weise wie Rahlwes. Beruhend auf dieser Analogie legte er auch eine theoretische Analyse des langzeitigen Verformungsverhaltens des Balkens vor. Im Falle eines Rechteckquerschnittes nahm er die Wanddicke des entsprechenden Kastenquerschnittes einheitlich gleich $b_1/5$ sowie die Druckstrebenneigung gleich 45° . In diesem Fall vereinfachen sich die Ausdrücke sehr, und man erhält für die Torsionssteifigkeit rechteckiger Querschnitte bei reiner Torsion im Zustand II den Ausdruck:

$$\frac{1}{GK_{II}} = \frac{1}{E_b b_1 d_1^3} \left[\frac{10 d_1 (b_1 + d_1)}{b_1^2} + \frac{E_b (b_1 + d_1)^2 (\mu_B + \mu_L)}{E_e b_1^2 \mu_B \mu_L} \right] \quad (97)$$

wobei

$$\mu_L = \frac{F_L}{b_1 d_1}$$

$$\mu_B = \frac{2 (b_1 + d_1) F_{ss}}{b_1 d_1 s}$$

und F_L die gesamte Querschnittsfläche der Längsbewehrung bedeuten.

μ_L und μ_B in dem obigen Ausdruck unterscheiden sich von μ_L und μ_B in Gl. (96) nur wenig, und zwar nur darin, daß Rahlwes diese auf die gesamte Querschnittsfläche bd bezieht, während Karlsson sie auf die Fläche $b_1 d_1$ des von der Bügelmittellinie umschlossenen Betonkerns bezogen hat. Soll der Balken unsymmetrisch bewehrt sein (F_{eo} bzw. F_{eu}), so nimmt man μ_L aus der Beziehung

$$\frac{1}{\mu_L} = \frac{1}{4} \left[\frac{1}{\mu_{Lo}} + \frac{1}{\mu_{Lu}} \right] \quad (98)$$

mit $\mu_{Lo} = \frac{F_{eo}}{b_1 d_1}$

und $\mu_{Lu} = \frac{F_{eu}}{b_1 d_1}$

Die Übereinstimmung der nach Gl. (97) errechneten Steifigkeitswerte mit den Versuchswerten wird verbessert, wenn man den Einfluß der "Verwölbung" der Seiten des tordierten Stabes in der Berechnung mit berücksichtigt, denn hierdurch können, besonders bei großen Querschnitten, die Stauchungen der Betondruckstreben auf den Oberflächen Werte erreichen, die wesentlich höher ausfallen, als z. B. die nach der Fachwerkanalogie berechneten Werte. Um die langzeitigen Verformungen auszurechnen, braucht man nur in dem Steifigkeitsausdruck (97) das erste Glied in Klammern mit $(1 + \varphi)$ zu multiplizieren, wobei φ die Kriechfunktion darstellt.

Ein Vergleich mit Versuchsergebnissen zeigte, daß die Formel (97) für Hohlkasten oberhalb der Rißlast (Punkt A im Bild 28), dagegen für Vollquerschnitt erst oberhalb des Fließzustandes (Punkt B im Bild 28) recht gute Ergebnisse liefert. Dies weist darauf hin, daß das Fachwerkmodell das Balkenverhalten bei einem Vollquerschnitt nicht hinreichend genau beschreibt, bis die Bewehrung in irgendeinem Punkt zum Fließen kommt, was nur nach der vollen Rißentwicklung möglich ist. Jedoch liegen hier die berechneten Werte der Verformung zu hoch und somit auf einer sicheren Seite.

5.2.4 Collins et. al. [52]

Die Balkenverdrehung bei kombinierter Torsion zerlegten die Verfasser in zwei Bestandteile, zum einen verursacht von den über die Risse verlaufenden Verschiebungen und zum anderen durch die Spannungen des zwischen die Risse fallenden und ungerissen verbleibenden Betons hervorgerufen. Das heißt:

$$\theta = \theta_s + \theta_b \quad (99)$$

Den Teil θ_s errechnet man aus der Geometrie der gegenseitigen Verschiebung der Rißufer infolge der Bügeldehnung, für die eine entlang des Balkenquerschnittsrandes parabolisch verlaufende Spannungsverteilung (z. B. nach Cowan) zu Grunde gelegt wird. Drückt man die Bügelspannung, nach Rausch, als Funktion des von der Bewehrung übernommenen Torsionsanteiles T_s aus, so läßt sich schreiben:

$$\theta_s = \frac{2}{3} \cdot \frac{T_s}{F_{ss} E_b l^2} \quad (100)$$

Andererseits kann man zur Berechnung des Beitrags des ungerissenen Betons die Elastizitätstheorie zu Grunde legen und schreiben

$$\theta_b = \frac{T_b}{G K_I} \quad (101)$$

$$\text{mit } G = \frac{E_b}{2} \quad (102)$$

und mit dem Torsionsträgheitsmoment $K_I = \delta b^3 d$, d. h. am ungerissenen Vollquerschnitt gerechnet (der Beiwert δ hängt wiederum von b/d ab). In Gleichung (101) bedeutet T_b den vom ungerissenen Beton übernommenen Torsionsanteil, d. h.

$$T = T_b + T_s \quad (103)$$

Mit Hilfe der Gleichungen (99) bis (103) kann man die Verwindung (und damit die Torsionssteifigkeit im Zustand II) ausrechnen, falls man den Anteil T_s bzw. T_b bestimmen kann. Eine Möglichkeit wäre durch Abschätzung der Bügeldehnungen (experimentell oder sonst irgendwie) und dann deren Umwandlung in T_s . Diese Methode liefert zwar sehr gute Ergebnisse von θ , ist aber für praktische Balken kaum verwendbar, denn es ist beinahe unmöglich, die Stahlspannung ohne Messungen im voraus abzuschätzen. Aus diesem Grunde empfiehlt sich als Alternative die Bestimmung von T_b . Hierzu schlugen die Verfasser den folgenden empirischen Weg vor:

(1) Bis auf die Erscheinung der Risse wird die gesamte Last vom Beton übertragen, d. h. bei der Rißlast ist:

$$T_b = T_R \text{ (Rißmoment)} \quad (104)$$

Um T_R auszurechnen, kann man eine der Bruchhypothesen zugrunde legen; die Verfasser benutzten das Hauptspannungskriterium und kamen somit zu der Formel:

$$\left. \begin{aligned} \frac{T_R}{T_o^*} &= -\frac{T_o^*}{2\phi M_o^*} + \sqrt{\left(\frac{T_o^*}{2\phi M_o^*}\right)^2 + 1} \\ \text{und } M_R &= \frac{T_R}{\phi} \end{aligned} \right\} \quad (105)$$

Hierin bedeuten T_o^* u. M_o^* die Tragfähigkeit des entsprechenden unbewehrten Balkenquerschnitts bei reiner Torsion bzw. reiner Biegung.

(2) Nach dem Reißentstehen stellt die Tragfähigkeit eines nur mit Längsbewehrung versehenen Balkens den Grenzwert für T_b dar. Da Versuchsergebnisse zeigen, daß diese Tragfähigkeit praktisch gleich der Tragfähigkeit des unbewehrten Balkens ausfällt, so kann man T_b gleich dem letzteren ansetzen. Es wurde ferner willkürlich angenommen, daß der größte Widerstand von T_b bei einem Torsionsmoment mobilisiert wird, das etwa 90 % der Balkentragkapazität T_u entspricht, d.h. es ist:

$$T_b = T_o^* \quad (106)$$

(bei $T = 0,9 T_u$)

(3) Zwischen T_R und $0,9 T_u$ wurde angenommen, daß der Betonanteil T_b linear variiert.

Die auf diese Weise berechneten Werte der Balkenverdrehung zeigten eine recht gute Übereinstimmung mit den Versuchswerten, besonders bei den normalen unbewehrten Balken unter mäßigen T/M-Verhältnissen.

Um die Durchbiegung des Balkens bei Torsion + Biegung zu berechnen, kann man für die Balkensteifigkeit (mittlerer Wert für den ganzen Balken) den Ausdruck (91) verwenden, wenn man die Werte von M_R und I_R modifiziert. Das Biegemoment M_R bei Torsion und Biegung kann man aus Gleichung (105) bestimmen. Um die Biegesteifigkeit bzw. das Trägheitsmoment I_R im gerissenen Zustand zu berechnen, leiteten die Verfasser aus der Geometrie der aus Längseisendeckung hervorgerufenen Reißuferverschiebung den folgenden Ausdruck ab:

$$EI_R = \frac{F_{eu} k_z h^2 (1 - k_x) \cdot E_e}{1 + \frac{k_z h (b_1 + d_1)}{2 b_1 d_1} \cdot \frac{T_s}{M}} \quad (107)$$

Für reine Biegung (d.h. $\frac{T_s}{M} = 0$) geht Gl. (107) in Gl. (90) über. Für die dazwischen liegenden T/M-Werte besagt Gl. (107), daß ein gleichzeitig einwirkendes Torsionsmoment die Biegesteifigkeit verkleinert. Die hierzu notwendigen Werte von T_s ermittelt man, indem man zunächst auf dem oben beschriebenen empirischen Weg den Wert von T_b ausrechnet. Die an Hand der Gl. (91) zusammen mit Gl. (107) errechneten Werte der Durchbiegung zeigen eine sehr gute Übereinstimmung mit den Versuchswerten.

Nach Collins sind jedoch seine Ausdrücke nur bis etwa zwei Drittel der Traglast anwendbar, d.h. nicht im Bruchzustand.

5.2.5 Bay [67][74]

Einen anderen Weg beging Bay, indem er bei reiner Torsion die Torsionskonstante K_I des ungerissenen Zustandes auch im Zustand II verwendete, dafür aber einen abgeminderten Schubmodul einführte. Dem gerissenen Stahlbetonbalken legte er idealisierte Anisotropie zugrunde mit um die Balkenachse unter 45° verlaufenden Rissen. Mit dem Erscheinen der Risse wird die Betonzugspannung auf die orthogonale Bewehrung übertragen. Für den Schubmodul G , der im gerissenen Zustand Veränderungen erfährt, die in Abhängigkeit von den Elastizitätsmoduli der zwei Hauptrichtungen des orthogonal-anisotropen Zustandes stehen, entwickelte Bay den folgenden Ausdruck im Fall reiner Torsion

$$G_{II} = E_b \frac{E_e \mu_s}{(E_b + E_e \mu_s)} \quad (108)$$

wobei μ_s den Bewehrungsprozentsatz der den Schrägriß durchsetzenden Drillbewehrung darstellt. Mit einer unveränderten Torsionskonstante ($K_I = K_{II}$) ist somit das Verhältnis der Torsionssteifigkeiten im Zustand I und Zustand II gleich dem Verhältnis der entsprechenden Schubmoduli, also gleich:

$$\frac{G_{II}}{G_I} = \frac{2 E_e \mu_s}{(E_b + E_e \mu_s)} (1 + \nu) \quad (109)$$

Nehme man die Betonquerdehnungszahl $\nu = 0$, dann wird:

$$\frac{G_{II}}{G_I} = \frac{2 E_e \mu_s}{(E_b + E_e \mu_s)} \quad (110)$$

G_{II} nimmt somit mit abnehmendem μ_s im Verhältnis zu G_I rasch ab, und damit wird auch die Torsionssteifigkeit verkleinert.

Hingegen kann man bei kombinierter Beanspruchung mit einer unverändert gebliebenen Torsionskonstante nicht davon ausgehen, denn die unterschiedlichen Hauptspannungszustände oberhalb bzw. unterhalb der Nulllinie geben dem Querschnitt den Charakter einer gewissen Inhomogenität. Unter Anwendung der Ansätze für die orthogonale Anisotropie leitete Bay für den Hohlkastenquerschnitt unter Torsion + Biegung die folgenden Ausdrücke ab (s. auch Bild 29).

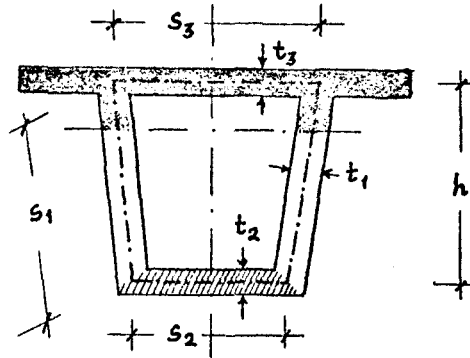


Bild 29 Hohlkastenquerschnittsabmessungen

Die Torsionssteifigkeit des gerissenen Zustandes wird:

$$G_I K_{II} = G_I \frac{h^2 (s_2 + s_3)^2}{2 \frac{s_1}{\alpha_s t_1} + \frac{s_2}{\alpha_u t_2} + \frac{s_3}{t_3}} \quad (111)$$

Hierbei bedeuten

$$\alpha_s = \frac{G_s}{G_I} \quad \text{und} \quad \alpha_u = \frac{G_u}{G_I}$$

wobei G_s und G_u die Schubmoduli des Steges bzw. der Unterplatte bedeuten und für die die folgenden Formeln gelten:

$$\left. \begin{aligned} \frac{G_s}{G_I} &= \frac{2 E_e \mu_s}{(E_b + E_e \mu_s)} \\ \frac{G_u}{G_I} &= \frac{2 E_e \mu_u}{(E_b + E_e \mu_u)} \end{aligned} \right\} \quad (112)$$

μ_s ist hier der Bewehrungsprozentsatz im Steg, bezogen auf den unter 45° gelegten Schrägschnitt, dagegen ist μ_u der auf die untere Platte bezogene Bewehrungsprozentsatz.

Kommt nun eine Querkraft noch hinzu, so kann man die Gleichungen (111) und (112) anwenden, indem man lediglich die Schrägbewehrung im Ansatz

$$\frac{G_s}{G_I} = \alpha_s = \frac{2 E_e \mu_s}{(E_b + E_e \mu_s)}$$

um das für die Schubbewehrung aus Querkraft erforderliche Maß erhöht.

Das letztere beträgt

$$\mu_{s\text{ Schub}} = \frac{\tau_0}{\sigma_e} \quad (113)$$

wobei τ_0 die aus Querkraft erzeugte zusätzliche Stegschubspannung ist.

Außer den oben erwähnten wichtigen Arbeiten sind von einigen Forschern empirische Ausdrücke für die Torsionssteifigkeit im Zustand II vorgelegt worden, die auf eigenen Versuchen beruhen und in denen die Steifigkeit des ungerissenen Zustandes durch einen empirisch ermittelten Reduktionsfaktor modifiziert wurde; z. B. Hsu [54, S. 261 bis 306], Ramakrishnan und Vijayarangan [45] und Iyengar und Vijayarangan [54, S. 403 bis 440].

5.3 Gegenüberstellung der Steifigkeitsberechnungsformeln

Die Faktoren, welche die Balkensteifigkeit im wesentlichen beeinflussen, sind folgende:

1. Das Längsbewehrungsverhältnis und die Verteilung der Stahleinlagen: Ein höheres Längsbewehrungsverhältnis und eine bessere Bewehrungsverteilung erhöhen die Biegesteifigkeit des Balkens, obwohl der Einfluß auf die Torsionssteifigkeit geringer ist.
2. Das Querbewehrungsverhältnis und der Bügelabstand: Ein höheres Verhältnis sowie eng gestellte Bügel erhöhen die Torsionssteifigkeit wesentlich; dagegen ist der Einfluß nicht so bedeutend auf die Biegesteifigkeit. Offene Bügel sind ferner nicht so wirksam.
3. Die Querschnittsform: Hierunter soll man nicht nur die Gestalt (z. B. Rechteck-, T-, L- oder Hohlkastenbalken), sondern auch die Querschnittsschlankheit (z. B. das b/d -Verhältnis) verstehen. Die Querschnittsschlankheit übt einen geringen Einfluß aus.
4. Die Beanspruchungskombination: Die Überlagerung eines Torsionsmomentes auf ein vorhandenes Biegemoment verkleinert die Biegesteifigkeit; dagegen wird die Torsionssteifigkeit durch Überlagerung eines Biegemomentes nur gering verringert. Der Einfluß einer zusätzlich einwirkenden Querkraft ist auch gering.

5. Die Betonfestigkeit: Eine höhere Betongüte erhöht nicht nur die Rißlast, sondern auch die Balkensteifigkeit.

Der gegenwärtige Stand der Steifigkeitsberechnungsmethoden ist nicht weit genug entwickelt, um alle Faktoren mit einzuschließen. Anhand der folgenden zu diesem Zweck aufgestellten Bilder werden wir sehen, wie die vorhandenen Formeln die verschiedenen Einflüsse beurteilen.

5.3.1 Die Betonfestigkeit

Bild 30 zeigt, wie die verschiedenen Formeln den Einfluß der Betongüte erfassen. Außer Bay liegen die anderen in einem ziemlich engen Bereich, und zwar hat die Betonfestigkeit nach ihrer Auffassung nur sehr geringen Einfluß auf die Balkensteifigkeit.

Die Formeln von Lampert-Thürlimann, Karlsson und Rahlwes basieren auf der Fachwerkanalogie; daher ist es verständlich, daß sie etwa die gleiche Abhängigkeit aufzeigen. Bemerkenswert ist jedoch, daß die Formel von Collins, die auf völlig anderem Weg abgeleitet wurde, auch diesen Einfluß in gleicher Weise erfaßt. Die überlagerten Versuchsergebnisse bestätigen die erfaßte Abhängigkeit; somit ist zu entnehmen, daß im gerissenen Zustand die Betonfestigkeit ohne Einfluß bleibt.

5.3.2 Die Längsbewehrung

Den Einfluß der Längsbewehrung auf die Balkensteifigkeit im Zustand II zeigt das Bild 31. Wieder unterscheiden sich die auf der Fachwerkanalogie beruhenden Formeln von Lampert-Thürlimann, Karlsson und Rahlwes kaum voneinander. Dagegen soll nach Collins die Steifigkeit mit wachsendem Längsbewehrungsgrad ein wenig abnehmen. Dies dürfte auf folgendes zurückzuführen sein: Collins weist einen Teil der Balkensteifigkeit dem ungerissen gebliebenen Beton zu, gibt aber keinen Ausdruck für die Berechnung des Tragfähigkeitsanteils des Betons. Zu diesem Zweck wurde daher der Ausdruck (85) verwendet, was gewisse Ungenauigkeiten verursachen kann. Nach Bay ist die Zunahme der Steifigkeit sehr stark. Die ebenfalls ins Bild eingetragenen Versuchsergebnisse bestärken jedoch die Ansicht der Fachwerktheorie, daß die Längsbewehrung praktisch keinen Einfluß ausübt.

5.3.3 Die Bügelbewehrung

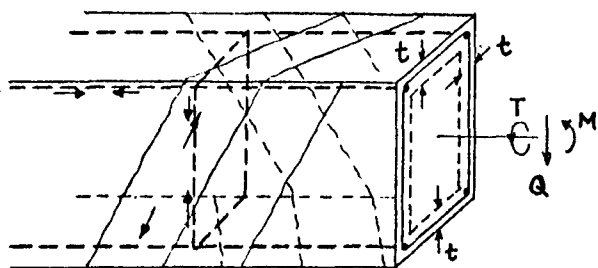
Das Bild 32 zeigt, wie dieser Einfluß von den verschiedenen Autoren erfaßt wurde. Diesmal liegen die Formeln von Collins, Karlsson und Rahlwes nahe beieinander, während die von Lampert-Thürlimann wesentlich abweicht. Dies mag darauf zurückzuführen sein, daß diese Formel in erster Linie für einen Balken mit einem quadratischen Bewehrungskorb entwickelt wurde. Die von der Bayschen Formel aufgezeigte Abhängigkeit ist wiederum sehr stark und hat einen linearen Verlauf. Es sind in der Literatur keine an stark bügelbewehrten Balken durchgeführten Versuchsergebnisse vorhanden, deshalb ist ein Vergleich nicht möglich. Dem Bild könnte man jedoch entnehmen, daß die Bügelbewehrung allein keinen wesentlichen Einfluß hat.

Um den Einfluß des Gesamtbewehrungsgrades zu untersuchen, wurde nun Bild 33 angefertigt. Als Parameter wurde die Größe $\sqrt{\mu_L \cdot \mu_{Bu}}$ gewählt, und es wurde ferner vorausgesetzt, daß $\mu_L \cong \mu_{Bu}$ ist. Der Vergleich mit den eben eingetragenen Versuchsergebnissen zeigt, daß die von Rahlwes entwickelte Formel, mindestens für reine Torsion, die beste Übereinstimmung zeigt. Für einen überwiegend torsionsbeanspruchten Bauteil scheint somit die Fachwerkanalogie die Balkensteifigkeit im Zustand II am besten zu erfassen.

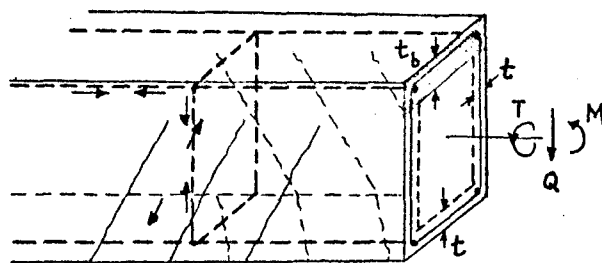
5.4 Berechnung der Torsionssteifigkeit rechteckiger Querschnitte bei kombinierter Torsion

Die vorangegangene Gegenüberstellung der vorhandenen Formeln und deren Vergleich mit den Versuchsergebnissen zeigt, daß die auf der Fachwerkanalogie beruhenden Ausdrücke - mindestens bei reiner Torsion - die wirklichkeitsnächsten Ergebnisse liefern. Es empfiehlt sich daher, auch bei Balken unter $T + M + Q$ die Fachwerktheorie heranzuziehen, um eine zuverlässige Berechnungsformel abzuleiten. Eine solche Formel wurde vor kurzem entwickelt [105], und zwar für unterbewehrte Rechteckbalken, bei denen eine derartige Fachwerkbildung sicher ist.

Bild 34a zeigt ein Balkenteil, bei dem das Fachwerk auf allen Seiten voll ausgebildet wurde; dies geschieht bei Balken unter reiner Torsion oder unter nur geringer Biegemomentenbeanspruchung. Dagegen bleibt bei relativ großen M/T -Verhältnissen die Druckplatte rißfrei, so daß man hier mit einem zweiten



(a) erstes Bruchschema
(T/M groß)



(b) zweites Bruchschema
(T/M klein)

Bild 34 Das räumliche Fachwerk

(Bild 34b)

Bruchschema zu arbeiten hat. Der tragende Mechanismus des ersten Bruchschemas (größere T/M -Verhältnisse) besteht hauptsächlich aus einer nahe an der Querschnittsoberfläche liegenden "Schale", d. h. man idealisiere den Vollquerschnitt durch den entsprechenden Hohlquerschnitt mit den gleichen Außenabmessungen. Die "Wanddicke" t beeinflusst die Balkensteifigkeit kaum, daher wird sie gleich $0,2 b_1$ angenommen. Die Längsbewehrung denkt man sich konzentriert in den Ecken. Um die Ableitung zu erleichtern, nimmt man an, daß die Mittellinie des "Ersatzhohlkastens" mit der Bügelmittellinie übereinstimmt und daß das Biegemoment lediglich von den Längseisen und die Querkraft von den senkrechten "Wänden" übernommen wird. Der Mechanismus des zweiten Bruchschemas besteht aus einer rißfreien Druckplatte und dem üblichen Fachwerk auf den restlichen drei Seiten.

Das Torsionsmoment erzeugt Zug in allen Längseisen, dagegen wird die obere Bewehrung infolge eines Biegemomentes auf Druck beansprucht. Die Druckplatte bleibt rißfrei, solange die Druckbeanspruchung größer ist; hieraus gewinnt man die Bedingung, daß das Bruchschema 1 herrscht, wenn

$$\frac{T}{M} > \frac{2 \tan \alpha}{\left(1 + \frac{d_1}{b_1}\right)} \quad (114)$$

ausfällt. α ist hier die in den senkrechten "Wänden" vorhandene mittlere Neigung der Druckstreben. Sie ist in den meisten Fällen gleich 45° , wird aber kleiner mit wachsendem T/M -Verhältnis. Versuchsbeobachtungen lassen etwa die folgende Abhängigkeit feststellen:

$\frac{T}{M} =$	$\leq 0,1$	0,2	0,3	0,4	0,5	$\geq 0,7$
$\alpha =$	50°	46°	43°	42°	41°	40°

Kommt eine Querkraft hinzu, so wird die Druckstrebenneigung in den zwei senkrechten "Wänden" verschieden - kleiner auf der Seite, wo T und Q im gleichen Sinn wirken. Wegen der vorhandenen Querschnittssymmetrie kann man diese Neigung in den zwei "Wänden" gleich $\alpha + \beta$ (bei T - Q) bzw. $\alpha - \beta$ (bei T + Q) setzen, wobei der Abweichungswinkel β klein ist (meistens $< 5^\circ$) und nur vom M/Qd_1 -Verhältnis abhängen soll (d. h. von der Querkraft). Für die ungünstigste Schubbeanspruchung ($M/Qd_1 \leq 2,0$) darf man $\beta = 5^\circ$ und für $M/Qd_1 > 6,0$ $\beta = 0^\circ$ ansetzen. Dazwischen genügt eine lineare Interpolation.

Die Verformungen des Ersatzfachwerkes lassen sich mit Hilfe des Castigliano'schen Prinzips leicht ausrechnen. Somit muß vorausgesetzt werden, daß der Beton wie der Stahl dem Hookeschen Gesetz gehorchen, was annimmt, daß das vorhandene Moment noch unterhalb des Fließmomentes liegt. Die auf diese Weise gewonnenen Ausdrücke für die Torsionssteifigkeiten im Zustand II sehen folgendermaßen aus:

Für Bruchschema 1 (Fachwerkbildung auf allen Seiten, bei großen T/M-Verhältnissen):

$$\frac{1}{GK_{II}} = \frac{(1+V)}{4 E_e d_1^2} \left[-\frac{(R-1) \cot \alpha}{\phi \bar{F}_{eu}} + 2 \cot^2 \alpha \left\{ \frac{(V+1)(R+1)}{4 \bar{F}_{eu}} + \frac{s}{b_1 F_{ss} \cot^4 \alpha} \right\} + \right. \\ \left. + \frac{4}{\lambda} \cot \alpha \tan \beta (1 + \cot^2 \alpha) \left\{ \frac{V(R+1)}{4 \bar{F}_{eu}} - \frac{V \cdot s}{b_1 F_{ss} (1+V) \cot^4 \alpha} \right\} + \frac{E_e}{E_b} \cdot \frac{40}{b_1^2 \sin^2 2\alpha} \right] \quad (115)$$

Für Bruchschema 2 (Fachwerkbildung auf drei Seiten, bei kleinen T/M-Verhältnissen):

$$\frac{1}{GK_{II}} = \frac{(1+V)}{4 E_e d_1^2} \left[\frac{\cot \alpha}{\phi \cdot \bar{F}_{eu}} + 2 \cot^2 \alpha \left\{ \frac{(1+V)}{4 \bar{F}_{eu}} + \frac{s(1+2V)}{2 b_1 (1+V) F_{ss} \cot^4 \alpha} \right\} + \right. \\ \left. + \frac{4}{\lambda} \cot \alpha \tan \beta (1 + \cot^2 \alpha) \left\{ \frac{V}{4 \bar{F}_{eu}} - \frac{V \cdot s}{b_1 F_{ss} (1+V) \cot^4 \alpha} \right\} + \frac{E_e}{E_b} \cdot \frac{20(1+2V)}{(1+V) b_1^2 \sin^2 2\alpha} \right] \quad (116)$$

Hierin bedeuten

$$\phi = \frac{T}{M}; \quad \lambda = \frac{T}{Qb_1}; \quad V = \frac{d_1}{b_1} \quad \text{und} \quad R = \frac{\bar{F}_{eu}}{\bar{F}_{eo}}$$

Die Berechnungsformeln (115) bzw. (116) sind anwendbar, wenn das zugrunde gelegte Fachwerk voll ausgebildet ist; dies geschieht meistens, wenn die Last etwa 80% der Traglast erreicht hat. Andererseits bleibt der Balken bis zu etwa 20 % der Traglast relativ rißfrei, so daß hier die Balkensteifigkeit der Steifigkeit des Zustandes I entspricht; diese darf an dem Vollquerschnitt mit Hilfe der Elastizitätstheorie bestimmt werden. Eine Auswertung der in diesem Bericht nachfolgend erwähnten Versuchsergebnisse (z. B. s. Bild 95) zeigt ferner, daß zwischen diesen beiden Grenzen die Torsionssteifigkeit parabolisch interpoliert werden darf. Somit kann man die Balkensteifigkeit in jedem Zustand folgendermaßen ausrechnen:

Bis $\frac{T}{T_u} \leq 0,2$: $GK = G_b K_I$ (Steifigkeit des Zustandes I)

Ab $\frac{T}{T_u} \geq 0,8$: $GK = GK_{II}$ nach (115) bzw. (116) (Steifigkeit im Zustand II)

Zwischen $0,2 < \frac{T}{T_u} < 0,8$: GK ^{parabolisch} ~~linear~~ interpoliert zwischen $G_b K_I$ und GK_{II} .
(siehe hierzu Bild 35)

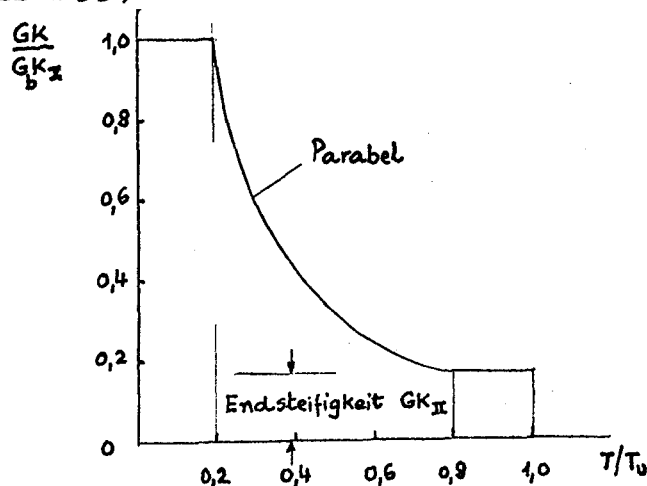


Bild 35 Interpolation der Torsionssteifigkeit GK

Die auf diese Weise ermittelten Torsionssteifigkeiten zeigen eine gute Übereinstimmung mit den gemessenen Werten; sie liegen ein wenig auf der sicheren Seite. Die abgeleiteten Formeln sind somit ein zuverlässiges Mittel zur Berechnung der Balkenverformungen.

6. Das Versuchsprogramm

6.1 Einleitung

Im Jahre 1966 wurde vom Deutschen Ausschuß für Stahlbeton am Institut für Baustoffkunde und Stahlbetonbau der Technischen Universität Braunschweig ein Forschungsvorhaben genehmigt, um das Tragverhalten rechteckiger Stahlbetonbalken unter kombinierter Torsionsbeanspruchung (Torsion + Biegemoment + Querkraft) zu studieren. Da zu diesem Zeitpunkt am Otto-Graf-Institut, Stuttgart, Versuche an Stahlbeton-Rechteckbalken unter reiner Torsion durchgeführt wurden, lag es nahe, die neue Versuchsreihe mit diesen abzustimmen. Durch diese Anlehnung an die Stuttgarter Versuche sollte erreicht werden, die Versuchsergebnisse vergleichbar zu machen und Versuche für reine Torsionsbeanspruchung einzusparen.

Die Versuche wurden in zwei Reihen durchgeführt, die eine mit 9 und die andere mit 2 Balken. Die Versuchskörper wurden in Anlehnung an die Stuttgarter Versuchsreihe VS (Variation des Bewehrungsgrades) konzipiert, und es wurden übernommen:

1. Balkenquerschnitt 24 x 44 cm
2. Stahlsorte St. III b
3. Durchmesser der Torsionslängsbewehrung und der Bügelbewehrung \varnothing 6 mm

Die Zielsetzung der Versuche beinhaltete möglichst umfassend den Problemkreis "torsionsbeanspruchte Stahlbetonbauteile" zu untersuchen, d. h. im einzelnen:

1. das Trag- und Verformungsverhalten unter Berücksichtigung des Einflusses der Bewehrungsdurchführung zu studieren,
2. die Frage zu klären, in welchem Maße das Tragverhalten im Zustand II von den unter Zugrundelegung des Superpositionsprinzips für Querkraft und Torsionsbeanspruchung errechenbaren Werten abweicht,
3. die Interaktion vom Biegemoment und von Torsion zu untersuchen und
4. den Einfluß der Stahlspannung auf die Torsionssteifigkeit zu studieren.

Für die zusätzliche Biegebeanspruchung mußte gegenüber der Bewehrung der Stuttgarter VS-Serie (Versuchsbalken VS 2, VS 3 und VS 4) eine Biegebewehrung zugelegt werden, und zwar so, daß im Gebrauchszustand im querkraftbeanspruchten Balkenbereich gemäß DIN 1045 eine Bügelbewehrung zur Aufnahme der Querkraft erforderlich wurde.

6.2 Versuchsaufbau

Für die neun Balken der ersten Reihe (Balken QT 2.1 bis QT 2.3, QT 3.1 bis QT 3.3, QT 4.1, QT 4.2, QT 2.4) wurde als statisches System der Einfeldträger mit zwei Einzellasten und einem konstanten Torsionsmoment gewählt (Bild 36a). Alle Balken dieser Reihe, mit Ausnahme des Balkens QT 2.4, versagten im querkraftfreien Bereich und gaben somit ein Bild der Torsion-Biegemoment-Interaktion. Die Versuche an den zwei Balken der zweiten Reihe (Balken QT 2.5, QT 2.6) sollten deshalb zum Ziel haben, unter Beibehaltung der Querschnittsabmessungen und der zuvor verwendeten Schubdeckungsgrade Versagen in den zusätzlich querkraftbeanspruchten Balkenbereichen hervorzurufen. Für diese Serie wurde als statisches System der Einfeldträger mit Kragarmen gewählt; die Belastung erfolgte durch zwei Einzellasten im Feld und je eine auf dem Kragarm (Bild 36 b).

Das Torsionsmoment wurde durch stählerne Hebelarme mittels Zugpressen eingeleitet, und zwar bei Balken der ersten Serie in den Auflagerquerschnitten, dagegen bei Balken der zweiten Serie jeweils 1 m entfernt von den Auflagerquerschnitten (s. hierzu Bilder 37 und 38). Bei Balken der ersten Serie ergab sich hiermit im Feld ein Momenten-Schub-Verhältnis $\frac{a}{h} \approx 3,0$ (ein für die Schubtragfähigkeit kritischer Wert) sowie einen querkraftfreien Bereich, dessen Länge etwa $2,5 h$ betrug.

Somit wurden kraftstörungsfreie Prüfbereiche geschaffen. Wie aus Bild 36 b hervorgeht, enthalten die Balken der zweiten Serie Feldendbereiche mit Momenten-Nullpunkten, d. h. mit sekundärem Biegemomenteneinfluß. Sollte der Bruch in diesem Bereich auftreten, so kann man von einer Torsions-Querkraft-Bbeanspruchung (ohne Biegemoment) sprechen. Die Kragarme waren bei diesem Belastungsschema einem Momenten-Schub-Verhältnis $\frac{a}{h} \approx 1,8$ unterworfen.

7. Die Versuchskörper

7.1 Beschreibung der Versuchsbalken

In Anlehnung an die Stuttgarter Versuchsbalken VS 2, VS 3 und VS 4 wurden die Versuchskörper mit den gleichen Querschnittsabmessungen und der Torsionslängs- sowie -querbewehrung versehen. Die für das Biegemoment benötigte und durch eine n-freie Bemessung erzielte zusätzliche Längsbewehrung bestand aus 4 \emptyset 20 mm (St. III b), die im mittleren Balkenbereich so ausgelegt wurde, daß bei reiner Biegung der Bruch etwa gleichzeitig durch Versagen des Betons und durch Fließen des Stahles zu erwarten war. Diese Biegebewehrung vermag mit einem durch die Anlehnung an die Stuttgarter Versuche festliegenden Querschnitt eine möglichst große Biegebeanspruchung aufzunehmen. Dies einmal, um möglichst hohe Querkraftbeanspruchungen erzeugen zu können, und andererseits, um den möglichen Einfluß der Betongüte auf die Traglast bei kombinierten Beanspruchungen nicht auszuschließen.

Als Bezeichnung der Versuchsbalken wurden die Bezeichnungen QT (Abkürzung für Querkraft und Torsion) gewählt, und zwar $QT\ 2 \hat{=} VS\ 2$, $QT\ 3 \hat{=} VS\ 3$ und $QT\ 4 \hat{=} VS\ 4$. Eine Gegenüberstellung der beiden Versuchsserien hinsichtlich der Bewehrung vermittelt das Bild 39 bzw. die Tabelle.

Wie aus Bild 39 hervorgeht, betrug die zugelegte Biegebewehrung: $F_e = F_e(4\emptyset 20) - F_e(n\emptyset 6)$, da die n Längseisen III \emptyset 6 mm im Bereich der angeordneten Biegebewehrung entfielen.

Das gewählte Momenten-Schub-Verhältnis $\frac{a}{h} \approx 3,0$ im Feld gilt für Einzellasten als besonders ungünstig. Die Schubbewehrung wurde entsprechend der von Prof. Leonhardt vorgeschlagenen teilweisen Schubdeckung bestimmt. Es kann leicht nachgewiesen werden, daß die Biegetraglast $M_u \approx 20$ Mpm beträgt. Damit wird das Gebrauchsmoment

$$M = \frac{20}{1,73} = 11,4 \text{ Mpm} \quad Q = \frac{11,4}{1,25} = 9,15 \text{ Mp}$$

$$\text{Schubspannung } \tau_0 = \frac{9150}{0,9 \times 24 \times 40,9} = 10,4 \text{ kp/cm}^2 \quad \begin{array}{l} < 26 \text{ kp/cm}^2 \\ > 8 \text{ kp/cm}^2 \end{array}$$

Die durch die Bügel abzudeckende Schubkraft ΔT beträgt:

$$\Delta T = \frac{\tau_0}{\tau_0(2)} \cdot \frac{M}{z} = \frac{10,4}{26} \cdot \frac{11400}{0,9 \times 40,9} = 12430 \text{ kp}$$

Die erforderliche Schubbewehrung ist somit:

$$F_z = \frac{12430}{2400} = 5,2 \text{ cm}^2$$

Gewählt: 9 BU \varnothing 6 mm $\hat{=} F_z \text{ vorh.} = 5,1 \text{ cm}^2$

Ein Bild der Bügelanordnung verschafft die folgende Tabelle.

	Erforderliche Bügelanzahl zur Schubdeckung	Vorhandene Bügel- anzahl der VS-Serie	Erforderl. Bügel- anzahl der QT- serie	Bügelabstand (gerechnet über der Länge 1,25 m)
	(n)	(n)	(n)	(cm)
QT 2	9	12,5	22	5,69
QT 3	9	18,7	28	4,46
QT 4	9	25,0	34	3,68

Der Balken QT 2.4 hat bezüglich Querkraft überhaupt keine zusätzlichen Bügel erhalten; er besitzt somit den Schubdeckungsgrad Null. Aus der ersten Balkenreihe war dieser Balken tatsächlich der einzige, der im Querkraftbereich versagte.

Die Versuchsbalken der zweiten Reihe (QT 2.5 und QT 2.6) wurden gleich bewehrt. Die zuvor untersuchten Balken QT 2.1 bis QT 2.4 der ersten Reihe besaßen eine Biegebewehrung aus 4 \varnothing 20 mm $\hat{=} F_e = 12,56 \text{ cm}^2$. Bei den Versuchsbalken QT 2.5 und QT 2.6 wurde die Stützbewehrung gleich der Feldbewehrung gewählt und in Anlehnung an die Versuchsbalken QT 2.1 bis QT 2.4 $F_e = F'_e = 12,56 \text{ cm}^2$ angeordnet. Weiter galt es, die Durchmesser der Biegebewehrung so zu wählen, daß durch aufgebogene Eisen möglichst der gleiche Schubdeckungsgrad erreicht wurde wie durch die zusätzlichen Querkraftbügel in den Versuchsbalken QT 2.1 bis QT 2.4. In einem Prüfbereich (A) bestand ferner die Schubbewehrung ausschließlich aus aufgebogenen Eisen, in dem anderen (B) aus Bügeln. In der folgenden Tabelle ist die Bewehrung dieser Balken der Balken QT 2.1 bis QT 2.3 gegenübergestellt.

	Biegebewehrung	Balken- bereich	Bügel- Anzahl	Bügel- abstand	aufgebogene Schub- eisen	F_{es}	F_v
			(n)	(cm)		(cm ²)	(cm ²)
QT 2.1- 2.3	4Ø20 = 12,56 cm ²		22	5,69			12,4
QT 2.5 u. QT 2.6	2Ø20 + 2Ø16 + 2Ø12 = 12,56 cm ²	B	22,5	5,56			12,7
		A	12,5	10,0			7,1
					2 Ø 16	5,7	+ 5,7 12,8

Detaillierte Angaben über die Bewehrungsausführung sind für die Versuchsbalken QT 2.1 - QT 2.3 dem Bild 40, für Balken QT 3.1 - QT 3.3 dem Bild 41, für Balken QT 4.1 und QT 4.2 dem Bild 42, für Balken QT 2.4 dem Bild 43 und für Balken QT 2.5 und QT 2.6 dem Bild 44 zu entnehmen.

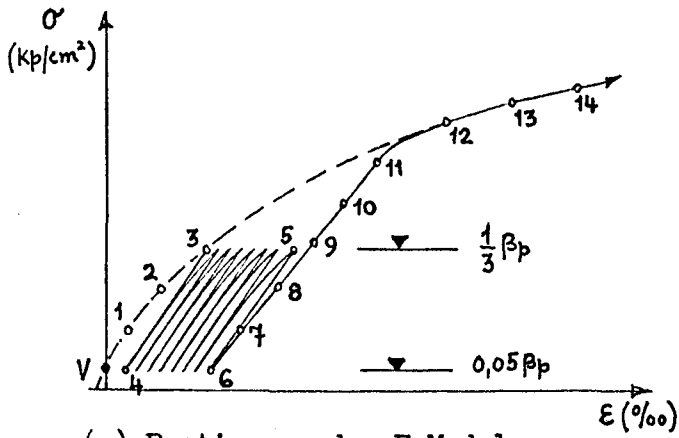
7.2 Baustoffe

7.2.1 Beton

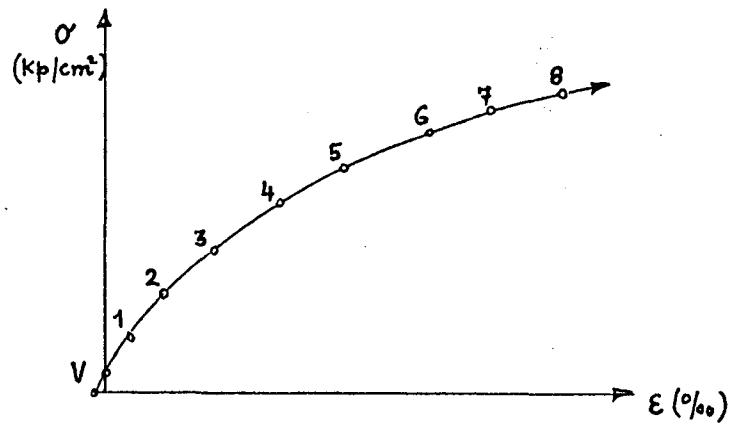
Angestrebt wurde bei den Versuchen eine Betongüte B 250; es wurde das folgende Mischungsrezept festgelegt, das bei sämtlichen Versuchsbalken angewendet wurde.

	QT 2 - QT 4	QT 2.5	QT 2.6
Angestrebte Betongüte B 250 $\hat{=}$ β_w (kp/cm ²)	250	> 250	> 250
a. Zuschlagstoffe:	Sieblinie E	Sieblinie E	Sieblinie E
b. Zement Alemannia	Z 275	PZ 275	PZ 275
Normenfestigkeit N ₂₈ (kp/cm ²)	406	451	451
Zementmenge Z (kp/m ³)	250	242	242
c. Wassermenge W (kp/m ³)	153	194	193
d. Frischbeton			
Wasserzementwert W/Z	0,61	0,8	0,8
Ausbreitmaß A (cm)	38,6 (Mittelw.)	40	39,8
Luftporengehalt P (%)	1,95 (Mittelw.)	0,85	-
Raumgewicht des verdichteten Betons γ (kp/m ³)	2236 (Mittelw.)	2402	2397

In Parallelversuchen wurde die Würfel- und Zylinder- (bzw. Prismen-)druckfestigkeit sowie die Biegezugfestigkeit bestimmt. Die ermittelten Festigkeiten sind der nachfolgenden Tabelle zu entnehmen. Die Bestimmung des E-Moduls erfolgte für die Versuchsbalken der ersten Reihe an 15 x 30 cm Zylindern mit Dehnungen gemessen an vier Seiten mit einem Setzdehnungsmesser, Meßbasis 10 cm. Die Bestimmung des E-Moduls für die Balken der zweiten Reihe (QT 2.5 und 2.6) erfolgte an 15 x 15 x 70 cm Prismen mit Dehnungen gemessen mit induktiven Gebern an vier Seiten. Die Versuchsdurchführung zur Bestimmung des E-Moduls wurde prinzipiell gleich durchgeführt, und zwar wurde die Last stufenweise mit einer Laststeigerung $\Delta P \approx \frac{\beta_p}{10}$ aufgebracht. Die Belastung wurde bis $\frac{1}{3} \beta_p$ stufenweise gesteigert, anschließend 8 x zwischen $0,05 \beta_p$ und $\frac{1}{3} \beta_p$ ent- und belastet, dann auf $0,05 \beta_p$ entlastet und anschließend bis zum Bruch stufenweise belastet. Als E-Modul wurde der zwischen der 6. und 9. Laststufe ermittelte Sekantenmodul angegeben (Bild 45).



(a) Bestimmung des E-Moduls



(b) Bestimmung der Arbeitslinie

Bild 45

Betonkennwerte

Prüfkörper zum Balken	Prüfalter	Würfelfestigkeit ⁺ β_w	Zylinder- ⁺ festigkeit β_{zyl}	Biegezug- ⁺ festigkeit β_{bz}	E-Modul ⁺
	(Tage)	(kp/cm ²)	(kg/cm ²)	(kp/cm ²)	(kp/cm ²)
QT 2.1	122 - 149	327	269	46	230 000
QT 2.2	28 - 30	300	237	44	250 000
QT 2.3	28 - 31	356	293	42	265 000
QT 3.1	35 - 43	345	270	43	221 000
QT 3.2	28 - 33	277	231	-	224 000
QT 3.3	28 - 31	268	239	35	210 000
QT 4.1	28 - 36	280	221	35	216 000
QT 4.2	28 - 31	337	254	35	269 000
QT 2.4	35 - 41	386	324	41	270 000
⊗ QT 2.5	28 - 36	283	251 ^x	36	275 000
⊗ QT 2.6	25 - 29	284	237 ^x	39	275 500

+ Mittelwert

x Prismendruckfestigkeit

⊗ Balken der zweiten Reihe

Die angegebenen Festigkeiten sind Mittelwerte; die Würfelfestigkeit wurde an Würfeln mit 20 cm Kantenlänge, die Zylinderfestigkeit an 15 x 30 cm Zylindern, die Prismenfestigkeit an 15 x 15 x 70 cm und die Biegezugfestigkeit an 10 x 10 x 53 cm bzw. 15 x 10 x 70 cm Balken ermittelt.

7.2.2 Betonstahl

An jeweils 3 Proben wurden die Kennwerte der verwendeten Bewehrungsstähle ermittelt; die Mittelwerte sind nachfolgend aufgeführt:

Kennwerte der Bewehrungsstähle

Versuchsreihe	Nenndurchmesser	Vorh. Querschnittsfläche F_e	Streckgrenze $\beta_{0,2}$	Zugfestigkeit β_z	Bruchdehnung	E-Modul E
	(mm)	(cm ²)	(kp/cm ²)	(kp/cm ²)	(%)	(kp/cm ²)
I	Ø 6 mm	0,306	5040	5603	-	2,119x10 ⁶
	Ø 20 mm	3,156	4390	5347	-	2,119x10 ⁶
II	Ø 6 mm	0,283	4417	5124	15,5	-
	Ø 12 mm	1,12	4227	5338	16,1	-
	Ø 16 mm	2,051	4291	5448	13,6	-
	Ø 20 mm	3,135	4083	4944	12,3	-

Die Spannungs-Dehnungs-Linien sowie die Kennwerte der in den Versuchsbalken der ersten Reihe verwendeten Stähle sind im Bild 46 wiedergegeben.

7.3 Herstellung der Versuchsbalken

Die Anordnung von zahlreichen Meßstellen für Dehnungsmessungen an der Bewehrung erforderte eine sehr maßhaltige Bewehrungsführung. Mit Hilfe einer speziell angefertigten Biegelehre wurden die Bügel zu Toleranzen auf ± 1 mm gebogen. Ebenfalls sorgten speziell angefertigte Abstandslehren dafür, daß das Zusammenflechten des Bewehrungskorbes sehr maßhaltig ausgeführt wurde.

Nach Herstellung der Bewehrungskörbe wurden die Meßstellen ausgerüstet (Näheres hierüber siehe Kapitel 7.4.1). Als Schalung wurde eine Holzschalung verwendet, auf die für das Betonieren ein Aufsatz gesetzt wurde. Die sehr engen Bewehrungsabstände gestatteten ein Verdichten nur bedingt, da nur eine sehr schmale Rüttelflasche Ø 3,5 cm eingesetzt werden konnte, weshalb außen an der Schalung mit einem Schalungsrüttler nachgeholfen werden mußte.

Nach dem Betonieren wurden die Versuchsbalken einige Tage feucht gehalten. Mit dem Versuchsaufbau wurde im allgemeinen 14 Tage nach dem Betonieren begonnen.

Die Stützweite sämtlicher Versuchsbalken betrug 3,50 m. Die Auflager wurden so ausgebildet, daß für Bewegungen in Balkenlängsrichtung ein Lager beweglich und das andere fest war. Weiter besaßen beide Lager Verdrehungsfreiheit orthogonal zur Balkenlängsrichtung und um die Achse im Schwerpunkt des Balkenquerschnittes. Den Versuchsaufbau zeigen die Bilder 37 und 38.

7.4 Meßtechnik

7.4.1 Dehnungsmessungen

Aus mehreren Meßmöglichkeiten wurden bei diesen Versuchen lediglich Setzdehnungsmesser und elektrische Dehnmeßstreifen eingesetzt. Im Hinblick auf die geplanten zahlreichen Messungen wurden aus wirtschaftlichen Gründen Setzdehnungsmesser bevorzugt (Meßplättchen pro Stück DM 0,65 gegenüber DM 4,-- pro Stück für Dehnstreifen). Es wurden aber doch je Balken einige Meßstellen parallel mit Dehnstreifen ausgerüstet.

Beim Einsatz von Dehnmeßstreifen wurde folgendermaßen verfahren: Die Profilierung der Stäbe wurde abgeschliffen, um eine möglichst ebene Klebeverbindung zwischen Stahl und Dehnstreifen zu erhalten und um Querbeanspruchungen der Dehnstreifen aus Unebenheiten zu vermeiden. Im Bereich der Dehnstreifen wurde jede Meßstelle mit halben PVC-Rohrstückchen abgedeckt (Vermeidung von Querpressung) und mit dem Stahl verklebt (wasserdicht). Die Zuleitungen wurden innerhalb eines flexiblen Rohres, das im Schwerpunkt des Querschnitts angeordnet war und entsprechend abzweigende Rohrstücke besaß, an den Balkenstirnseiten herausgeführt. Eingesetzt wurden Meßstreifen der Firma Tokyo Kenkyuyo Ltd. Typ PL 30. Mit Hilfe eines Meßumschalters wurden im Versuch die einzelnen Meßstellen abgefragt.

Im allgemeinen wurden für die Dehnungsmessung Setzdehnungsmesser eingesetzt, und zwar wurden für die Längseisen Setzdehnungsmesser mit einer Meßbasis von 20 cm und für Bügel und Beton Setzdehnungsmesser mit einer Meßbasis von 10 cm verwendet. Für den 20-er Setzdehnungsmesser wurden Meßplättchen mit einer kegelförmigen Bohrung und für den 10-er Setzdehnungsmesser (Bauart Pfender) Meßplättchen mit eingeschlagener Kugel verwendet. Die Meßplättchen wurden mit einem Kleber X-60 mit den Stäben bzw. mit dem Beton verklebt. Um die Meßstellen auch nach dem Betonieren zugänglich zu haben, wurde an jede Meßstelle ein PVC-Rohrstücke mit dem Stahl sorgfältig verklebt (Bild 47) und dann so verkorkt, daß erst mit dem Ausrichten der Schalung die Korken stramm saßen. Die Korken reichten so bis zur Balkenoberfläche, was das Wiederfinden der Meßstellen erleichterte. Die Setzdehnungsmesser waren für die Messung an den Stählen mit Rücksicht auf die Betonüberdeckung mit langen Füßen (3 cm) ausgerüstet worden.

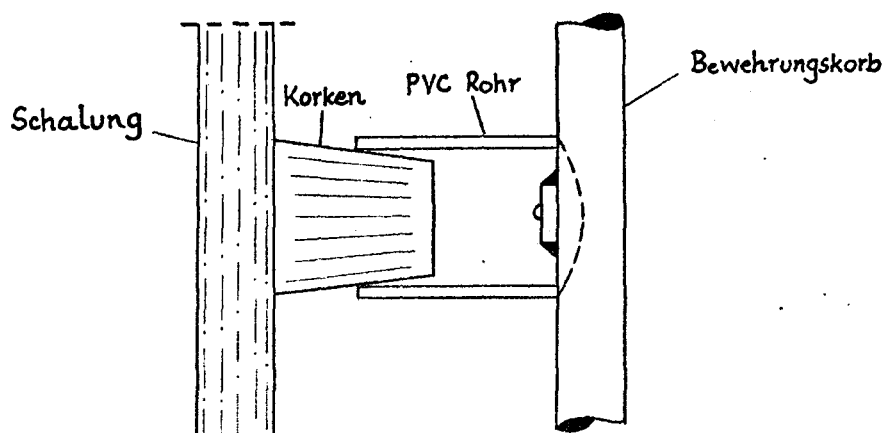


Bild 47 Ausbildung der Meßstelle für Dehnungsmessung mit einem Setzdehnungsmesser

Bei der zweiten Versuchsreihe konnten die Dehnungsmessungen an den aufgebogenen Stahleinlagen nur mit elektrischen Dehnmeßstreifen durchgeführt werden. An jedem aufgebogenen Eisen wurden etwa in der Höhe der Balkenmitte zwei Meßstreifen angebracht.

7.4.2 Durchbiegungsmessung

Durchbiegungsmessungen wurden nur unterhalb der im Feld eingetragenen Vertikallasten durchgeführt. Für die Messung war der Einsatz von den sogenannten Rollengeräten mit einer Meßgenauigkeit von 1/10 mm geplant. Da die Rollengeräte gleichzeitig für die Verdrehungsmessung der Querschnitte mit verwendet werden sollten, wurden je Balken-Querschnitt (unter den Einzellasten im Feld) zwei Rollengeräte angeordnet im Abstand $b' = 20$ cm. Die Durchbiegung in jedem Querschnitt ist damit der Mittelwert aus zwei Messungen. Die Anordnung der Meßstellen ist im Bild 48 anschaulich dargestellt.

7.4.3 Verdrehungsmessung

Zur Bestimmung der Torsionssteifigkeit sind Verdrehungsmessungen erforderlich. Es bestehen folgende Beziehungen:

Torsionssteifigkeit	$G \cdot I_T = \frac{T}{\vartheta}$	(kp/cm ²)
worin	$T =$ Torsionsmoment	(kp/cm)
	$\vartheta =$ Verwindung	(1/cm)

bedeuten.

Ferner ist: Verwindung $\vartheta = \frac{\varphi}{r}$

worin	$\varphi =$ Verdrehung
	$r =$ Abstand der Meßstelle von der Drillachse

bedeuten.

Die Verwindungsmessung mit Rollengeräten R_0 wird entsprechend (Bild 49):

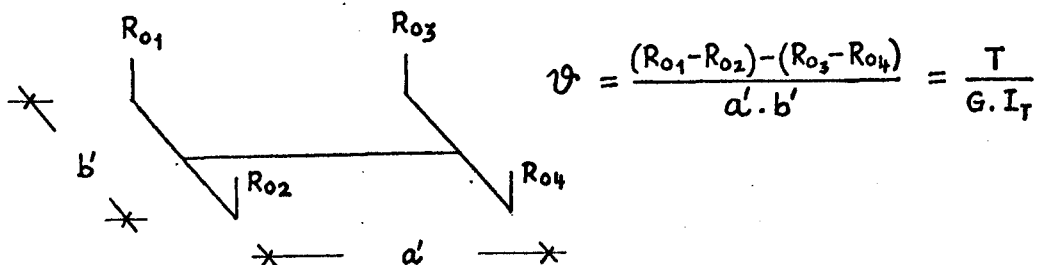


Bild 49 Verwindungsmessung mit Rollengeräten

$$\varphi = \frac{(R_{01} - R_{02}) - (R_{03} - R_{04})}{a' \cdot b'} = \frac{T}{G \cdot I_T}$$

Die Messung der Torsionssteifigkeit im Zustand I erfordert eine Meßgenauigkeit des einzelnen Rollengerätes von mindestens 1/1000 cm; dagegen reicht die vorhandene Genauigkeit (1/100 cm) zur Messung im Zustand II völlig aus. Da bei den Versuchsbalken QT 2.1 - 2.3, 3.1 - 3.3, 4.1 und 4.2 die Messungen lediglich durch Rollengeräte erfolgte, lieferte diese Meßmethode aufgrund ihrer geringen Meßgenauigkeit nur zutreffende Steifigkeitswerte für den Zustand II, gerissener Querschnitt, bei höheren Torsionsbeanspruchungen.

Bei den Versuchsbalken QT 2.4 - 2.6 wurde die Verwindung mit größerer Meßgenauigkeit festgestellt, und zwar wurde am Hebelarm von rd. 110 cm bei 25 cm Abstand der Meßquerschnitte die Verdrehung mit 1/100 und 1/1000 mm Meßuhren gemessen.

$$\Delta f = u_1 - u_2 = \frac{T}{G \cdot I_T} \cdot h \cdot a$$

worin $h = 110 \text{ cm}$

$a = 25 \text{ cm}$ sind.

Damit war die Messung der Torsionssteifigkeit im Zustand I (ungerissener Querschnitt) schon bei sehr geringen Torsionsbeanspruchungen und für die kleinste Laststufe mit guter Genauigkeit möglich.

Bei Balken QT 2.1 - 2.3, 3.1 - 3.3, 4.1 und 4.2 wurde die Torsionssteifigkeit im Zustand I über die gesamte Balkenlänge bestimmt, also ohne Rücksicht auf die unterschiedlichen Biege- bzw. Querkraftbeanspruchungen in verschiedenen Balkenquerschnitten. Erst bei den Versuchsbalken QT 2.4 - 2.6 wurden unterschiedlich beanspruchte Balkenbereiche hinsichtlich ihrer Verwindung infolge Torsion gemessen, und zwar mit Hilfe von genaueren Meßuhren.

8. Versuchsdurchführung

Bei den Versuchsbalken der ersten Serie, die hauptsächlich zur Aufklärung der Torsion-Biegung-Interaktion dienen sollten, ging es darum, sie in sinnvoll gewählten Beanspruchungsverhältnissen von Biegemoment zu Torsionsmoment M/T zu belasten. Gewählt wurden M/T -Verhältnisse von 2,5 bis 8,2; bei den kleineren Verhältnissen war die Torsionsbeanspruchung vorwiegend, bei den größeren Verhältnissen die Biegebeanspruchung. Auf diese Weise wurde je Balkentyp eine Bruchart mit vorwiegender Torsion, eine mit vorwiegender Biegung und eine dazwischen liegende geschaffen. Zwischen den Laststufen schwankt das Beanspruchungsverhältnis (M/T) naturgemäß geringfügig infolge der zusätzlichen Beanspruchungen aus Eigengewicht und aus der Belastungseinrichtung. Die stählernen Hebelarme zur Eintragung des Torsionsmomentes wurden im übrigen nach den Versuchen QT 2.1, QT 3.1 und QT 4.1 so umgebaut, daß aus ihrem Eigengewicht keine zusätzliche Torsionsbeanspruchung auftrat.

Für die Beanspruchungskombination "Torsion und Querkraft" waren derzeit keine Anhaltspunkte bekannt; es sollte daher ein Zustand angestrebt werden, der den Einzeltraglasten T_0 und Q_0 entspricht. Es sollte versucht werden, aus der Bruchlast bereits abzulesen, ob die Traglast bei kombinierter Beanspruchung der Superposition der Einzeltraglasten entspricht. Bei den Versuchsbalken QT 2.5 und 2.6 trat der Bruch in dem Bereich auf, wo das Biegemoment nur von sekundärem Einfluß war. Das Q_b/T -Verhältnis betrug beim ersten Bruch bei Balken QT 2.5 2,59 und bei Balken QT 2.6 1,172.

Die Bewehrungsführung war bei den Versuchsbalken QT 2.5 und QT 2.6 variiert worden, indem an einem Balkenende ausschließlich Bügel angeordnet waren, während die Bewehrung am anderen Balkenende aus Bügeln und aufgebogenen Stäben bestand. Um den Einfluß der unterschiedlichen Bewehrungsführung auf die Traglast bei kombinierter Beanspruchung bestimmen zu können, wurden die Versuchsbalken QT 2.5 und 2.6 an den zuerst aufgetretenen Bruchstellen (auf der Seite der aufgebogenen Eisen) bandagiert und erneut bis zum Versagen an einer zweiten Stelle beansprucht. Der zweite Bruch trat dann im Kragarmbereich auf der ausschließlich mit Bügeln versehenen Balkenseite auf, und zwar betrug das Q_b/T -Verhältnis in diesem Fall 2,98 bei Balken QT 2.5 und 1,266 bei QT 2.6

Die Belastung der Versuchsbalken wurde wie folgt durchgeführt:

In einem ersten Versuchsabschnitt (auch 1. Versuchstag) wurden die Versuchsbalken im jeweils festgelegten Beanspruchungsverhältnis M/T stufenweise belastet, wobei die Laststeigerung von einer Laststufe zur nächsten so durchgeführt wurde, daß gleichzeitig die Biege- und Torsionsbeanspruchung gesteigert wurde.

Die Beanspruchungen im ersten Versuchsabschnitt wurden so lange erhöht, bis der erste Riß mit einer Rißweite $\geq 0,2$ mm auftrat. Die Rißbreiten wurden entlang festgelegter Meßlinien an den Balkenseiten beobachtet.

In einem zweiten Versuchsabschnitt wurden die Versuchsbalken einer Schwellbeanspruchung (1 Lastwechsel pro Sekunde) von 40.000 Lastwechseln (Versuchsbalken QT 2.5 und 2.6 20.000 Lastwechsel) unterworfen. Da es nicht gelang, Biege- und Torsionsbeanspruchung im gleichen Takt zu fahren, wurde zuerst die Biegebeanspruchung (OL) konstant gehalten und die Torsionsbeanspruchung als Schwellbeanspruchung (20.000 Lastwechsel bei den übrigen und 10.000 bei QT 2.5 und 2.6) gefahren, anschließend wurde die Torsionsbeanspruchung (OL) konstant gehalten und die Biegebeanspruchung als Schwellbeanspruchung (20.000 Lastwechsel; bei QT 2.5 und 2.6 10.000 Lastwechsel) aufgebracht. Diese Maßnahmen zielten darauf ab, die zur Laststufe "0,6-fache Bruchlast" zugehörige Rißbildung frei von Sekundäreinflüssen zu erhalten. Damit war für den dritten Versuchsabschnitt die Voraussetzung geschaffen, für die Annahme eines gerissenen Querschnitts zutreffende Meßwerte zu erhalten.

Im dritten Versuchsabschnitt wurden die Versuchsbalken stufenweise bis zum Bruch belastet, wobei kurz vor dem Bruch lediglich die Gesamtverformungen gemessen wurden.

Die Versuche der zweiten Reihe hatten auch das Ziel, den Einfluß unterschiedlicher Bewehrungsführung auf die Traglast zu untersuchen. Daher wurde hier ein vierter Versuchsabschnitt angeordnet, in welchem die Versuchsbalken, an der ersten Bruchstelle bandagiert, bis zum Versagen in einem zweiten Querschnitt beansprucht wurden.

In den einzelnen Laststufen wurden an den Versuchsbalken gemessen:

Die Dehnungen der Längseisen und Bügel mit Setzdehnungsmessern, die Dehnungen der aufgebogenen Stäbe mit Dehnmeßstreifen, die Betondehnungen ebenfalls mit Setzdehnungsmessern, die Durchbiegungen des Balkens in mehreren Querschnitten sowie die Verdrehungen mit Rollengeräten (bei Balken QT 2.4, 2.5 und 2.6 mit Meßuhren). Weiter wurden die auftretenden Risse markiert und mit Meßlupen die Rißbreiten gemessen.

Bei einigen Versuchsbalken (QT 2.1, 3.1 und 4.1) wurden an den Balkenstirnseiten Schlupfmessungen an den Längsstählen durchgeführt. Es ergab sich kein Schlupf, d. h. eine Verankerungslänge von 25 cm hinter dem theoretischen Auflager war zur Verankerung der Stahleinlagen bis III Ø 20 mm ausreichend.

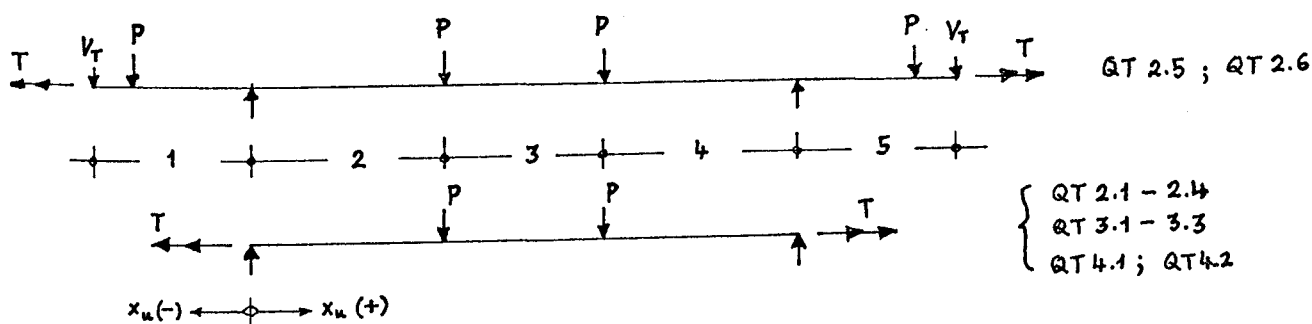
Die Durchführung des angedeuteten Meßprogramms erforderte je Laststufe zwischen 40 bis 60 Minuten.

9. Versuchsergebnisse

9.1 Bruchlasten

Die Beanspruchung der Balken in einzelnen Stufen ist den Tabellen 1 bis 10 zu entnehmen. Die Bruchlasten sind nachfolgend zusammengefaßt worden.

Balken	Last P (Mp)	Torsionsbelastung V_T (Mp)	Bruchzustand ⁺				Bruchstelle (s. Bild unten)
			M_u^* (Mpm)	T_u (Mpm)	Q_u^* (Mp)	$M : T : Q \cdot b$	
QT 2.1	17,25	2,76	21,963	2,682	0	8,2 : 1 : 0	Bereich 3
QT 2.2	12,75	5,44	16,338	4,08	0	4,0 : 1 : 0	Bereich 3
QT 2.3	8,25	5,632	10,713	4,224	0	2,54 : 1 : 0	Bereich 3
QT 3.1	17,2	3,34	21,9	3,233	0	6,77 : 1 : 0	Bereich 3
QT 3.2	15,75	6,72	20,088	5,04	0	3,99 : 1 : 0	Bereich 3
QT 3.3	9,75	6,656	12,588	4,992	0	2,52 : 1 : 0	Bereich 3
QT 4.1	17,25	4,56	21,963	4,392	0	5,0 : 1 : 0	Bereich 3
QT 4.2	10,875	7,36	14,463	5,52	0	2,62 : 1 : 0	Bereich 3
QT 2.4	11,25	4,8	14,434	3,6	11,55	4,01 : 1 : 0,77	Bereich 4
QT 2.5	24,0	3,29	8,783 (-21,582)**	2,25	24,13 (24,455)**	3,9 : 1 : 2,57* (9,6 : 1 : 2,61)**	Bereich 4
	25,5	3,47	-22,887**	2,385	29,425**	9,6 : 1 : 2,96**	Bereich 1 (2. Bruch)
QT 2.6	15,12	4,49	3,143 (-16,122)**	3,15	15,25 (15,575)**	1 : 1 : 1,16* (5,12 : 1 : 1,19)**	Bereich 4
	15,12	5,57	-17,202**	3,96	21,145**	4,34 : 1 : 1,28**	Bereich 1 (2. Bruch)



+ Eigengewicht des Balkens und der Belastungseinrichtung eingerechnet

* Maximalwerte unter der Feldeinzellast

** Werte im Auflagerquerschnitt auf der Bruchseite

Die ersten acht Balken der ersten Serie versagten im querkraftfreien Bereich, also unter $T + M$. Die erreichten Bruchlasten sind in Bildern 50 bis 52 in dimensionsloser Form aufgetragen und mit der Aussage der Fachwerkanalogie verglichen. Man erkennt deutlich die Zunahme der Torsionstraglast bei unsymmetrisch bewehrten Querschnitten (wie z. B. die vorhandenen Versuche), die durch eine Addition des Biegemomentes verursacht wird. Dies ist darauf zurückzuführen, daß das Biegemoment in der für die Torsionstragfähigkeit maßgebenden oberen Bewehrung Druckspannungen verursacht, die den Torsionszugspannungen entgegenwirken. Für die für die Praxis bedeutungsvolle überwiegende Biegebeanspruchung ($\frac{M}{M_0} > \text{etwa } 0,5$) liegt die durch die Versuchsergebnisse angedeutete Interaktion dem Kreis näher als z. B. der an Hand der Fachwerkanalogie festgelegten Parabel.

In den Bildern 50 bis 52 sind ferner die nach DIN 1045 und nach CEB/FIP-Richtlinien errechneten Traglasten aufgetragen. Vergleicht man diese mit den Versuchswerten, so läßt sich feststellen, daß eine Bemessung nach dem derzeitigen Stand der DIN 1045 oder der CEB-Richtlinien zu unnötig hohen Sicherheiten führt, die ferner bei verschiedenen T/M-Verhältnissen unterschiedlich ausfallen. Die ebenfalls aufgetragene Gl. 85 besitzt dagegen eine ausreichende und ziemlich gleichmäßige Sicherheit.

Balken QT 2.4, 2.5 und 2.6 versagten im Querkraftbereich unter Einwirkung von T, M und Q. In der folgenden Tabelle sind die in dem in der Mitte der Bruchlänge liegenden Balkenquerschnitt vorhandenen Schnittkräfte angegeben worden. Die Entfernung der Bruchstelle (x_u) ist von dem nächsten Auflager gemessen, dabei bedeutet ein negativer Wert x_u , daß sich die Bruchstelle auf dem Kragarm (bei Balken QT 2.5 und 2.6) befindet.

Balken	x_u	Bruchzustand ⁺				Bemerkungen
		M_u	T_u	Q_u	$M : T : Q \cdot b$	
	m	Mpm	Mpm	Mp		
QT 2.4	0,7	8,134	3,6	11,614	2,26 : 1 : 0,775	
QT 2.5	0,55	- 8,17	2,25	24,312	3,63 : 1 : 2,6	1. Bruch im Feld 2. Bruch am Kragarm
	- 0,45	- 9,7	2,385	29,26	4,06 : 1 : 2,94	
QT 2.6	0,48	- 8,666	3,15	15,45	2,75 : 1 : 1,18	1. Bruch im Feld 2. Bruch am Kragarm
	- 0,45	- 7,74	3,96	20,98	1,95 : 1 : 1,27	

+ Eigengewicht des Balkens und der Belastungseinrichtung eingerechnet.

Da bei diesen Bruchlasten die Biegemomente im allgemeinen relativ klein waren ($M/M_0 \ll 0,5$), wurden die vorhandenen Torsionsmomente und die Querkräfte im Bild 53 in einer dimensionslosen Form eingetragen und mit der Aussage der Fachwerkanalogie verglichen. Da die Bewehrungsanordnung des Balkens QT 2.4 sich von der der Balken QT2.5 und 2.6 wesentlich unterschied, wurde dieses Ergebnis bei dieser Auftragung nicht berücksichtigt, sondern es wurde im Bild 50 (T-M-Interaktion) aufgetragen. An Hand von nur zwei Versuchsbalken ist es nicht möglich, eine verbindliche Aussage über den experimentellen Verlauf der T-Q-Interaktion zu machen. Bild 53 läßt jedoch erkennen, daß sich die Versuchswerte etwa einem gradlinien Verlauf der T-Q-Interaktion anpassen.

Im Bild 53 sind auch die nach DIN 1045 und nach den CEB/FIP-Richtlinien errechneten Werte aufgetragen. Man sieht, daß die Bemessung nach dem derzeitigen Stand dieser Bestimmungen zu sehr hohen Sicherheiten führt.

9.2 Rißbildung und Bruchverhalten der Balken

In den acht Balken QT 2.1 - 2.3, QT 3.1 - 3.3, QT 4.1 und 4.2 hat sich die mit Hilfe des von Leonhardt vorgeschlagenen teilweisen Schubdeckungsgrades durchgeführte Verbügelung gegen Querkraft als so wirksam erwiesen, daß bei diesen Balken das Versagen im querkraftfreien Bereich auftrat. Dagegen versagte der Versuchsbalken QT 2.4, der den Schubdeckungsgrad Null erhielt, im Querkraftbereich, wo die kombinierte Beanspruchung im allgemeinen ungünstiger ausfällt.

Die ersten Biegerisse waren schon bei 10 bis 15 % der Traglast deutlich zu sehen, und zwar erschienen sie zuerst auf der unteren (Zug) Balkenseite. Im querkraftfreien Bereich war die Rißneigung bis etwa zur Hälfte der Bruchlast desto steiler, je größer das M/T-Verhältnis war. Weitere Laststeigerung hatte zur Folge, daß die Rißneigung allmählich flacher wurde, so daß sie beim Erreichen der Traglast in sämtlichen Balken praktisch unter 45° verlief. Die Risse im Querkraftbereich waren dagegen von Anfang an schräg, offenbar unter dem gemeinsamen Einfluß von Torsion und Querkraft. Ein typisches Beispiel der Rißbildung vermittelt Bild 54, während die Bilder 55 bis 61 das Rißbild sämtlicher Balken im Bruchzustand zeigen.

Im Versuchsbalken QT 2.4 war über die ganze Länge der Bügelbewehrungsgrad gleichmäßig gehalten; es war daher leicht zu vermuten, daß der Bruch im Querkraftbereich auftreten wird, was auch der Fall war. Bis zu etwa 40 % der

Bruchlast verliefen die Risse praktisch senkrecht zur Balkenachse (Biegerisse), wurden dann allmählich flacher.

Balken QT 2.5 und 2.6 der zweiten Versuchsreihe waren hinsichtlich der Bewehrungsanordnung ähnlich ausgeführt, auch die Betongüte ist gleich anzusehen. In einer Hälfte (Querkraftbereich) erhielten beide Balken eine durch aufgebogene Eisen geleistete volle Querkraftdeckung, während die andere Hälfte ausschließlich aber mit gleichem Schubdeckungsgrad verbügelt war. Der einzige Unterschied lag bei der Beanspruchungskombination; unter der Feld-einzellast betrug im Bruchzustand das $M : T : Q \cdot b$ -Verhältnis 3,9 : 1 : 2,57 bei QT 2.5 und 1 : 1 : 1,16 bei QT 2.6. Balken QT 2.5 hatte somit eine relativ größere Querkraft- und Balken QT 2.6 eine größere Torsionsbeanspruchung. Da aufgebogene Eisen zur Torsionsaufnahme nicht geeignet sind, versagte Balken QT 2.6 in der mit aufgebogenen Eisen versehenen Hälfte. Dagegen versagte Balken QT 2.5 in der anderen Hälfte, da hier die aufgebogenen Eisen zur Aufnahme der vorwiegenden Querkraftbeanspruchung gut paßten.

Der Größe des Biegemomentes entsprechend erschienen die ersten Biegerisse unmittelbar über dem Auflager und behielten ihren Charakter bis zu etwa 45 % der Bruchlast. Danach erschienen die Schrägrisse, die schließlich das Versagen des Balkens verursachten. Nach dem ersten Bruch im querkraftbeanspruchten Feldbereich waren die Balken bandagiert und weiter belastet. Der zweite Bruch trat in beiden Fällen auf der ausschließlich verbügelten Seite ein, und zwar am Kragarm.

Als Rißlast wurde die Last genommen, bei der die Risse etwa bis zur Mitte der Balkenhöhe eindringen. Die nachfolgende Tabelle gibt eine Zusammenstellung der Rißlasten bei den Balken beider Reihen.

Der Rißverlauf wurde in den Laststufen, in denen Dehnungsmessungen durchgeführt wurden, markiert, und die Rißweiten wurden in zuvor festgelegten Querschnittshöhen (ein Drittel der Balkenhöhe von Unterkante) und -abschnitten gemessen. Die Meßwerte über die Summe der Rißbreiten sowie die maximalen und mittleren Rißbreiten für die Balken der ersten Reihe sind den Bildern 62 und 63 zu entnehmen.

Balken	β_w	Rißzustand						Bemerkungen
		P_R/P_u	P_R	M_R^*	T_R	Q_R^*	$M : T : Q \cdot b$	
	kp/cm ²		Mp	Mpm	Mpm	Mp		
QT 2.1	327	0,261	4,5	5,99	0,744	0	8,05 : 1 : 0	
QT 2.2	300	0,353	4,5	5,99	1,44	0	4,15 : 1 : 0	
QT 2.3	356	0,364	3,0	4,11	1,536	0	2,68 : 1 : 0	
QT 3.1	345	0,349	6,0	7,86	1,2	0	6,55 : 1 : 0	
QT 3.2	277	0,381	6,0	7,86	1,92	0	4,1 : 1 : 0	
QT 3.3	268	0,34	3,31	4,5	1,695	0	2,65 : 1 : 0	
QT 4.1	280	0,39	6,73	8,77	1,68	0	5,22 : 1 : 0	
QT 4.2	337	0,38	4,13	5,52	2,115	0	2,61 : 1 : 0	
QT 2.4	386	0,4	4,5	5,99	1,44	4,8	4,15 : 1 : 0,8	
QT 2.5	283	0,45	10,8	3,83	1,017	10,93	3,76 : 1 : 2,58	
QT 2.6	284	0,5	7,56	2,24	0,99	7,69	2,26 : 1 : 1,86	

* Maximalwerte unter der Feldeinzellast auf der Bruchseite

Eine Studie der Bilder 62 und 63 läßt folgende Schlüsse zu:

1. Erwartungsgemäß nimmt die mittlere Rißbreite mit zunehmender Betongüte und abnehmender Bewehrung (d. h. große Stahldehnung) zu.
2. Ein abnehmendes M/T-Verhältnis erzeugt eine größere Anzahl eng stehender Risse. Dies soll normalerweise bedeuten, daß die mittlere Rißbreite mit wachsendem M/T-Verhältnis zunimmt. Eine derartige Tendenz kann jedoch an Hand dieser Bilder nicht festgestellt werden.
3. In dem Balkenbereich, wo die Torsions- und Schubspannungen additiv wirken, nimmt die mittlere Rißbreite mit wachsendem Q/T zu. Dagegen nimmt sie ab in den Bereichen, wo diese Spannungen im entgegengesetzten Sinn wirken, was selbstverständlich ist.
4. Die maximale Rißbreite nimmt mit abnehmendem Längs- und Bügelbewehrungsgrad, abnehmender Betongüte und abnehmendem M/T-Verhältnis zu. Torsion erzeugt i. a. klaffende Risse.
5. Die maximale Rißbreite nimmt mit abnehmendem Q/T-Verhältnis zu.


9.3 Stahlspannungen

9.3.1 Stahldehnungen der Querbewehrung

Bilder 64 bis 69 zeigen die gemessenen Dehnungen der Bügel und der aufgebogenen Eisen in Abhängigkeit von dem Torsionsmoment. Die Anwendung von Setzdehnungsmessern hatte zur Folge, daß die Dehnungsmessung im Bruchzustand oder unmittelbar vorher nicht durchgeführt werden konnte. Lediglich konnte man bei den aufgebogenen Eisen, wo Dehnmeßstreifen angewendet wurden, die Dehnungen im Bruchzustand messen. Die Bügeldehnungen der Balken der ersten Reihe sind in den Bildern 64 bis 66 aufgetragen, und zwar jeweils in zwei Balkenquerschnitten, einmal in der Mitte des querkraftbeanspruchten und dann in der Mitte des Querkraftfreien Bereiches. Aus dieser Auftragung kann man folgendes schließen:

1. Im Querkraftbereich werden die auf der Torsion- und Schubspannungen entgegenwirkenden Balkenseite liegenden senkrechten Bügelschenkel bis kurz vor dem Bruch wenig beansprucht. Für einen künftigen Bruch in diesem Bereich dürfte also das Bruchmodell 2 maßgebend sein.
2. Im querkraftfreien Bereich erhalten dagegen alle Bügelschenkel etwa gleichmäßige Beanspruchung, was auf eine gewisse Spannungsumlagerung rund um den Querschnitt hindeutet.
3. Bei kleiner werdenden M/T-Verhältnissen werden die Bügel stärker beansprucht, da offensichtlich die Bügelwirkung nur bei Torsion- bzw. Querkraftbeanspruchung zustande kommt.
4. Bügeldehnungen sind natürlich vom Bügelbewehrungsgrad direkt abhängig.
5. Bügeldehnungen liegen im allgemeinen unter dem nach der Fachwerktheorie (Rauschsche Formel) errechneten Wert.

Für die Balken der zweiten Reihe sind die gemessenen Dehnungen der Bügel in den Bildern 67 und 68 und die Dehnungen der aufgebogenen Eisen im Bild 69 aufgetragen. Da bei QT 2.6 die Bügeldehnungen lediglich bis zu etwa der Hälfte der Traglast gemessen wurden, ist hieraus hinsichtlich der Tragwirkung im Bruchzustand wenig zu entnehmen. Die Messungen des Balkens QT 2.5 sowie die der aufgebogenen Stäbe liefern diese Schlußfolgerungen:

1. Im querkraftfreien Balkenbereich, der eine relativ stärkere Bügelbewehrung erhielt, waren die Bügeldehnungen rings um den Querschnitt etwa gleich groß, blieben aber bis zum Bruch klein.
2. Im querkraftbeanspruchten Feldbereich, wo der erste Bruch auftrat, blieben die Bügeldehnungen auf der Querschnittseite, wo die Torsionsspannungen den Schubspannungen entgegenwirken, wesentlich kleiner. Die Ausbildung einer seitlichen Druckzone (Bruchmodell 2) ist somit festzustellen.
3. Bei größeren Q/T -Verhältnissen sind aufgebogene Eisen recht wirksam, da diese zur Aufnahme der überwiegenden Querkraftbeanspruchung geeignet sind. Das sieht man in den relativ kleineren Bügeldehnungen auf der Seite der aufgebogenen Stäbe gegenüber denen auf der ausschließlich verbügelten Seite.
4. Im relativ stark verbügelten Kragarmbereich blieben die Bügeldehnungen klein, es war immerhin festzustellen, daß sich hier eine dreieckförmige Druckzone ausbildet (zwischen Brucharten 2 und 3, d. h. ). Bei einem $M:T:Q \cdot b$ -Verhältnis von $9,6 : 1 : 2,96$ am Auflager ist dies natürlich zu erwarten.
5. Wie auch zu erwarten war, wurden bei aufgebogenen Stäben größere Stahldehnungen in dem Balken gemessen, bei dem das Q/T -Verhältnis größer lag. Im allgemeinen wurde kurz vor dem Bruch ein Dehnungsabfall beobachtet, was vermutlich auf die Ausbildung eines inneren Sprengwerkes zurückzuführen ist.

9.3.2 Stahldehnungen der Längsbewehrung




Die gemessenen Stahldehnungen der Längsbewehrung sind für die Balken der ersten Reihe in den Bildern 70 bis 78 und für die der zweiten Reihe in den Bildern 79 und 80 aufgetragen worden, und zwar in Abhängigkeit vom Torsionsmoment. Für die acht Balken der ersten Reihe, die im querkraftfreien Bereich versagten, ist die Dehnungsverteilung des querkraftfreien Bereiches über der Querschnittshöhe dargestellt. Außerdem zeigen die Bilder auch den Dehnungsverlauf über die Spannweite sowie die Dehnungsverteilung über die Querschnittshöhe in der Mitte des querkraftbeanspruchten Bereiches. Die Darstellungsweise der übrigen Versuchsbalken QT 2.4, 2.5 und 2.6, die im Querkraftbereich versagten, wurde etwas verschieden gewählt, und zwar wurden hier vor allem die Dehnungsverteilungen in den kritischen bzw. Bruchquerschnitten dargestellt.

Aus diesen Bildern läßt sich folgendes schließen:

Balken, die auf T + M versagten

1. In dem kritischen Balkenbereich ist beim Bruch die Ausbildung einer praktisch rechteckigen Druckzone an der Balkenoberseite (Bruchmodell 1) deutlich festzustellen. Die Höhe dieser Druckzone nimmt mit kleiner werdenden M/T-Verhältnissen ab.
2. In dem Querkraftbereich verschiebt sich dagegen die Druckzone zur Balken-
seite, offensichtlich auf Grund der vorhandenen Querkraft, so daß sich eine dreieckförmige Druckzone feststellen läßt (zwischen Modell 1 und 2). Die Druckzone ist wiederum größer, je kleiner das T/M-Verhältnis wird.
3. Die Stahlspannungen nehmen mit wachsendem M/T-Verhältnis zu, und zwar sowohl im querkraftfreien als auch im querkraftbeanspruchten Bereich. Die Beanspruchung der Bewehrung im Querkraftbereich bleibt jedoch vergleichsweise kleiner als die im querkraftfreien Bereich, offensichtlich wegen eines kleineren Biegemomentes.
4. In praktisch allen Versuchsbalken blieb die Stahlspannung deutlich unter der Fließgrenze. Dies deutet darauf hin, daß ein einfaches Superponieren der einerseits für die Torsionstraglast benötigten und andererseits für die volle Biegetragfähigkeit nach der n-freien Bemessung erzielten Bewehrungsmengen für kombinierte Beanspruchung sehr auf der sicheren Seite liegt.
5. Ein sehr enger Abstand der Torsionslängsbewehrung trägt bei kombinierter Beanspruchung nicht viel bei, außer vielleicht ein besseres Rißverhalten.

Balken, die auf T + M + Q versagten

1. Bei diesen Balken (QT 2.4 bis 2.6) ist die Ausbildung einer dreieckigen Druckzone deutlich zu erkennen, und zwar bei QT 2.4 (mit positivem Biegemoment) zwischen Modell 1 und 2 () und bei QT 2.5 und 2.6 (mit negativen Biegemomenten) zwischen Modell 2 und 3 ( bzw. ). Dies ist auf das Vorhandensein der Querkraft zurückzuführen.
2. Bei Balken QT 2.5 und 2.6 ist in der Nähe des Momentennullpunktes (also M von sekundärem Einfluß) eine "Konzentration" der Stahlspannung festzustellen, und zwar auf der Seite, wo die Torsions- und die Schubspannungen

additiv wirken. Die Stahlspannungen in dieser Gegend verteilen sich ferner etwa gleichmäßig über den Querschnitt. Dies ist auch in Abwesenheit des Biegemomentes verständlich. Im Gegensatz hierzu bleiben die Spannungen auf jener Balkenseite klein, wo Torsionsspannungen den Schubspannungen entgegenwirken.

9.4 Betondehnungen

Die Betondehnungen wurden an der Balkenoberfläche mit Setzdehnungsmessern (Meßbasis 10 cm) gemessen, und zwar in drei Richtungen - parallel, quer und unter 45° zur Balkenachse. Dabei wurden keine Messungen auf der unteren Balkenseite durchgeführt. Da die meisten Balken stark und eng gerissen waren, durchquerten die Risse häufig die Meßlänge, so daß es an Hand der Betondehnungsmessungen alleine nicht möglich ist, eine entscheidende Aussage über den Verlauf, die Größe und die Verteilung der Betonstauchungen zu machen. Diese Meßwerte sind daher nur im Zusammenhang mit denen der Bewehrung auszuwerten.

Bild 81 vermittelt einen Überblick über die Anordnung der Meßstellen bei den Balken beider Versuchsreihen. Die Bilder 82 bis 88 zeigen die wesentlichen Meßergebnisse der Balken der ersten Reihe, Bilder 89 und 90 dagegen für die zwei Balken der zweiten Reihe. Diese Auftragung bestätigt etwa die gleichen Schlußfolgerungen, die in Kapitel 9.3 gezogen werden. Zusätzlich darf man vielleicht über die Betonstauchungen in der Diagonalrichtung folgendes bemerken:

1. Die Betonstauchungen fallen in der mittleren Höhe des Balkens größer aus als in der Nähe der Balkenkanten. Dies ist wahrscheinlich darauf zurückzuführen, daß die unter Druck ausbiegenden "Betondruckstreben" in der Mitte ihrer Länge stärker beansprucht werden als z. B. am Ende.
2. Bei wachsendem M/T-Verhältnis nehmen die Betonstauchungen an den Balkenseiten ab. Dies kann auf folgendes zurückzuführen sein: Bei vorwiegender Torsion verlaufen die Risse praktisch unter 45° , so daß die gemessenen Stauchungen etwa die Hauptspannungen darstellen. Dagegen weicht für größere M/T-Verhältnisse die Hauptspannungsrichtung von der Meßrichtung wesentlich ab, so daß die gemessenen Werte nicht mehr die Hauptspannungen darstellen.

Leider ist es an Hand dieser Meßergebnisse nicht möglich, die Betonhauptspannungen auszurechnen, um z. B. den Einfluß von M/T bzw. Q_b/T auf sie auswerten zu können.

3. Im Vergleich zu den Dehnungen in der Längsrichtung - die entweder nur kleine Werte haben oder aber sogar positiv (Zug!) sind - fallen die Betonstauchungen in der Diagonalrichtung wesentlich größer aus. Die Hauptdruckspannungsrichtung ist somit zur Balkenachse geneigt, und zwar mag sie mit der Richtung der Betondruckstreben übereinstimmen.
4. Bei wachsendem M/T -Verhältnis nehmen die Stauchungen an der Balkenoberseite zu und werden ferner gegenüber denen an der Balkenseite nun größer. Dies ist im Hinblick auf die auf der Oberseite vorhandenen und mit wachsendem M/T -Verhältnis zunehmenden Biegenormalspannungen verständlich.
5. Von Balkenmitte zum Auflager nahmen die Betonstauchungen an der Oberseite ab, offensichtlich wegen der kleiner werdenden Biegenormalspannungen, die hier zur Bestimmung der Größe der Stauchungen vorherrschen. Dagegen ändern sich die gemessenen Stauchungen an den Balkenseiten kaum, weil hier die konstant bleibenden Torsionsspannungen vorwiegen.
6. Die gemessenen Betonstauchungen an der Balkenoberfläche in der Diagonalrichtung fallen wesentlich größer aus (zum Teil sogar mehrfach) als die aus Biegenormal- und Torsionsschubspannungen errechneten Werte der Hauptdehnungen. Dies stärkt die Ansicht von Lampert und Thürlimann, daß die Hauptbeanspruchung der Druckstreben aus dem "Verwindungseffekt" hervorgerufen wird.

9.5 Verformungen

9.5.1 Verdrehung

Die über die Gesamtlänge gemessenen Verwindungen der Versuchsbalken wurden in Abhängigkeit von T/T_u im Bild 91 aufgetragen. Die Verwindungen der sieben Balken (QT 2.2, 2.3, 3.1 bis 3.3, 4.1 und 4.2) der ersten Reihe wurden ferner als Funktion des absoluten Torsionsmomentes T in Bild 92 eingetragen. Bei den Versuchsbalken QT 2.4, 2.5 und 2.6 wurden außerdem Verdrehungen über unterschiedlich beanspruchte Balkenbereiche gemessen; diese Ergebnisse zeigt das Bild 93. Aus diesen Bildern läßt sich folgendes schließen:

1. Bis zum Rißbeginn ist die Verdrehung nahezu linear zum Torsionsmoment, d. h. der gesamte Querschnitt ist wirksam.
2. Mit der Rißausbildung wird die Last teilweise vom gerissenen Beton aber teilweise von der Bewehrung getragen, d. h. es liegt ein anderer Tragmechanismus vor. Mit der weiteren Rißentwicklung wird die Tragkapazität dieses Mechanismus allmählich kleiner, daher wächst die Verdrehung nun rascher an. Eine gewisse Ähnlichkeit des T- ϑ -Diagrammes mit dem Spannung-Dehnungs-Diagramm läßt sich hier erkennen, aber gleichzeitig merkt man auch, daß das T- ϑ -Diagramm desto flacher verläuft, je näher die Stahlspannung der Fließgrenze liegt. Dies deutet darauf hin, daß der Tragmechanismus ein räumliches Fachwerk sein könnte, dessen Glieder die Bewehrung und die zwischen die Risse fallenden Betondruckstreben sind. Bei kleinen T/M-Verhältnissen bleibt jedoch die Druckseite relativ rißfrei, so daß sich das Fachwerk nur auf drei Seiten ausbilden kann.
3. An Hand nur dieser Versuchsergebnisse ist es schwer, eine endgültige Aussage darüber zu machen, wie das T/M-Verhältnis die Balkensteifigkeit beeinflusst. Aus der Auftragung der Balken QT 2 und QT 4 im Bild 92 ist jedoch zu ersehen, daß die Verdrehung bei dem gleichen Torsionsmoment mit wachsendem T/M-Verhältnis abnimmt. Eine ähnliche Schlußfolgerung zeigten auch die Untersuchungen von Chinenkov [15], Iyengar und Rangan [54, S. 403 bis 440] und Collins u. a. [52].
4. Aus dem Bild 93 ist zu ersehen, daß das Vorhandensein einer Querkraft die Balkenverdrehung vergrößert. Ein direkter Vergleich der in Frage kommenden Balkenbereiche ist jedoch dadurch erschwert, weil sich gleichzeitig das T/M-Verhältnis ändert.

9.5.2 Torsionssteifigkeit

Die gemessene und auf die im Versuch beobachtete Anfangssteifigkeit bezogene Torsionssteifigkeit sämtlicher Versuchsbalken ist im Bild 94 eingetragen. Die Anfangswerte der gemessenen Verdrehungen sind sehr klein und daher gegenüber der Meßgenauigkeit sehr empfindlich, so daß die auf diese Weise im Versuch ermittelte Anfangssteifigkeit manchmal ungenau sein mag (wie ein Vergleich der in den Bildern 94 und 95 eingetragenen $GK_{T,I}$ -Werte im Versuch bzw. nach Rechnung

andeutet). Daher wurden die gemessenen Torsionssteifigkeiten auch auf die rechnerisch ermittelten Anfangssteifigkeiten (gerechnet für den Vollquerschnitt mit dem Sekantenmodul des Betons nach der Elastizitätstheorie) bezogen und gegen T/T_u im Bild 95 und gegen T im Bild 96 aufgetragen. Aus diesen Bildern und aus den Versuchsbeobachtungen können folgende Schlüsse gezogen werden:

1. Mit dem Rißerscheinen (bei rund 10 bis 20 % der Traglast) ist ein plötzlicher Steifigkeitsabfall zu erkennen, offensichtlich weil der tragende Mechanismus eine Änderung erfährt. Die weitere Rißentwicklung setzt diesen Abfall weiter fort, und zwar im sehr starken Maße bis zu etwa 60 bis 80% der Traglast. Dies ist der Zeitraum, in dem der erste Mechanismus infolge der Rißbildung langsam in den zweiten Mechanismus übergeht; daher ist ein kontinuierlicher Steifigkeitsabfall zu erkennen. Bei etwa 60 bis 80% der Traglast ist der zweite Mechanismus (z. B. das räumliche Fachwerk) voll ausgebildet, so daß infolge der weiteren Laststeigerung die Balkensteifigkeit nur noch sehr geringe Änderungen erfährt.
2. Ein wachsendes T/M -Verhältnis scheint die Balkensteifigkeit zu erhöhen; das gleiche geht auch aus den Untersuchungen von Chinenkov [15], Iyengar und Rangan [54, S. 403 bis 440] und Collins u. a. [52] hervor. Der Zuwachs im Endzustand fällt jedoch nicht groß aus.
3. Die Balkensteifigkeit im Endzustand beträgt nur noch 7 bis 15 % der Anfangssteifigkeit. Somit sinkt im Zustand II die Torsionssteifigkeit von Stahlbetonbalken viel stärker ab als die Biegesteifigkeit. Sie ist im Endzustand so klein, daß man sie einfach vernachlässigen dürfte, was auch bis jetzt üblich gewesen ist (z. B. bei der Bemessung von Randträgern in Hochbauten). Man muß jedoch darauf achten, daß die Torsionsbeanspruchung dort, wo sie für das Gleichgewicht erforderlich ist, im Zustand II zu großen Drehverformungen und somit zu klaffenden Rissen führt. Bei nicht vorgespannten Bauteilen muß also ein größerer Sicherheitsfaktor gewählt werden als er bei normaler Biegebeanspruchung üblich ist.
4. Die gemessenen Torsionssteifigkeiten von Versuchsbalken mit gleichem Beanspruchungsverhältnis T/M zeigen einen geringen Einfluß der Bewehrung auf die Torsionssteifigkeit (vgl. z. B. Balken QT 2.3, 3.3 und 4.2 im Bild 95). Diese Folgerung gilt jedoch nur für die Untersuchung, wo die maßgebende Biegebewehrung konstant beibehalten wurde.

9.5.3 Durchbiegung

Die Durchbiegung der Balken wurde lediglich bei QT 2.5 und 2.6 gemessen, und zwar unter der Feldeinzellast. Die Ergebnisse sind in Bild 97 aufgetragen. An Hand nur dieser Ergebnisse kann keine entscheidende Aussage gemacht werden, aber die Durchbiegung des Balkens 2.6, mit dem größeren T/M-Verhältnis, fällt kleiner aus als die des Balkens 2.5.

10. Zusammenfassung

Nach einer kurzen Einleitung in das Problem der Stahlbeton- und Spannbetonbauteile unter kombinierter Torsionsbeanspruchung und der geschichtlichen Entwicklung wurde über den derzeitigen Stand unserer Kenntnisse berichtet. Die wichtigen Torsionstheorien, die hauptsächlich in drei Gruppen einzuteilen sind, wurden kurz vorgestellt und später an Hand einiger Darstellungen miteinander verglichen. Die auf die Torsionstragfähigkeit und auf das Balkenverhalten verübten Einflüsse der wichtigen Parameter wurden kritisch untersucht. Eine auf dieser Studie basierende empirische Formel zur Tragfähigkeitsberechnung wurde dann angegeben. Es wurde auch die Balkenverformung studiert, indem nach einer Vorstellung der vorhandenen Formeln und deren Vergleich mit Versuchsergebnissen eine zuverlässige Formel zur Berechnung der Torsionssteifigkeit vorgeschlagen wurde.

Der zweite Teil des Berichtes beschäftigt sich mit den im Institut für Baustoffkunde und Stahlbetonbau der Technischen Universität Braunschweig in den Jahren 1966 bis 1968 durchgeführten Versuchen an 11 Stahlbeton-Rechteckbalken unter Torsion und Biegung bzw. Torsion, Biegung und Querkraft. Die Versuchskörper wurden in Anlehnung an die Stuttgarter Versuchsreihe VS (für reine Torsion) konzipiert; deshalb wurde ein Balkenquerschnitt von 24 x 44 cm, mit Stahl III b \varnothing 6 mm gegen Torsion bewehrt, übernommen. Für die Balken der ersten Reihe (T + M) wurde der Einfeldträger unter zwei Einzellasten mit einem querkraftfreien Bereich von 1,0 m Länge gewählt; für die Untersuchung von T + M + Q ergab dies ein kritisches a/h -Verhältnis von rund 3,0. Die letzten zwei Balken erhielten zusätzlich zwei Kragarme je 1,5 m Länge, um im Feld einen Momentennullpunkt erzeugen zu können, so daß der Einfluß des Biegemomentes ausgeschaltet werden konnte. Die Hauptvariablen dieser Untersuchung waren: die Bewehrung, das Torsionsmoment-Biegemomenten-Verhältnis und das Torsionsmoment-Querkraft-Verhältnis.

Die wesentlichen Ergebnisse dieser Studie können folgendermaßen zusammengefaßt werden:

1. Ob man als Bruchmodell das räumliche Fachwerk oder das Modell der schiefen Bruchfläche zugrunde legt, es lassen sich hauptsächlich drei Brucharten feststellen:

(a) Bruchmodell 1; wenn die Betondruckzone auf der oberen Balkenseite erscheint. Dies ist der bei $T + M$ bzw. $T + M + Q$ am häufigsten vorkommende Normalfall.

(b) Bruchmodell 2; wenn die Druckzone auf einer Balkenseite erscheint. Dies kommt bei Balken unter T bzw. $T + Q$ oder aber auch bei $T + M + Q$ vor, wenn die Biegebeanspruchung sehr gering ausfällt und der Balken etwa symmetrisch bewehrt ist.

(c) Bruchmodell 3; wenn die Druckzone auf der unteren Balkenseite erscheint. Dies kommt nur bei Balken mit einer sehr schwachen oberen Längsbewehrung vor.

Da ein plötzlicher Übergang von einem Modell zum anderen sehr unwahrscheinlich ist, besteht auch die Möglichkeit, daß sich die Druckzone auch dreieckförmig ausbilden kann. Derartige Erscheinungen wurden nicht nur bei diesen Versuchen festgestellt, sondern auch in anderen Untersuchungen erwähnt.

Legt man zur Tragfähigkeitsberechnung einen der Bruchmechanismen zu Grunde, so bedeutet dies nach dem Gesetz der Plastizitätstheorie eine Grenzlösung der oberen Schranke; die Traglast ist umso genauer, je exakter die inneren Kräfte erfaßt wurden (es kommt hier auf die Berücksichtigung oder die Vernachlässigung der Stahldübelkräfte und die Schub- bzw. die Torsionsspannungen im ungerissenen Beton an).

2. Die Fachwerkanalogie und die Gleichgewichtsmethode der schiefen Bruchfläche führen zum selben Ergebnis, wenn die Grundvoraussetzungen gleich sind. Lessigs Minimierungsmethode ergibt dagegen eine etwas kleinere Traglast. Der Unterschied liegt wahrscheinlich darin, daß bei den Gleichgewichtsmethoden gewisse innere Kräfte unberücksichtigt blieben.
3. Die Balken, die auf $T + M$ versagten, zeigten eine etwa kreisförmige Torsions-Biegemoment-Interaktion und wichen von der aus der Fachwerktheorie stammenden parabelförmigen Interaktion ab. Bei unsymmetrisch bewehrten und vorwiegend torsionsbeanspruchten Querschnitten ist das Bruchmodell 3 maßgebend. In die-

sem Fall erhöht sich die Torsionstragfähigkeit durch das Vorhandensein eines Biegemomentes, da das letztere in der oberen Längsbewehrung Druckspannungen erzeugt, die die aus dem vorhandenen Torsionsmoment hervorgegerufenen Zugspannungen teilweise abbauen und somit zu einer größeren Torsionstraglast führt.

und der CEB/FIP-Richtlinien

4. Eine Bemessung nach dem derzeitigen Stand der DIN 1045 führt zu unnötig hohen Sicherheiten, die ferner bei verschiedenen Torsions-Biegemomenten-Verhältnissen sehr unterschiedlich ausfallen.
5. Bei den Balken, die den von Leonhardt vorgeschlagenen teilweisen Schubdeckungsgrad erhielten, hat sich die Verbügelung gegen Querkraft als so wirksam erwiesen, daß das Versagen im querkraftfreien Bereich auftrat. Sollte in einer künftigen Versuchsanordnung die Untersuchung des Einflusses der Bügelbewehrung bei $T + M + Q$ beabsichtigt werden, so scheint es zweckmäßig zu sein, eine schwächere Verbügelung gegen Querkraft (als z. B. der hier vorhandenen) zu wählen. In den in Braunschweig neu geplanten Versuchen an Spannbetonbindern ist dies vorgesehen.
6. Die ersten Risse erschienen schon bei 10 bis 15 % der Traglast. Die Rißneigung im querkraftfreien Bereich war steiler für zunehmende M/T -Verhältnisse, wurde aber flacher mit der Annäherung an die Traglast, so daß sie sich im Endzustand von 45° nur unwesentlich unterschied. Die Risse im Querkraftbereich waren dagegen von Anfang an schräg, und zwar verliefen sie steiler auf der Balkenseite, wo das Torsionsmoment und die Querkraft im entgegengesetzten Sinn wirkten. Die Abweichung vom mittleren Wert der Rißneigung war unter 5° .
7. Die mittlere Rißbreite nimmt mit besserer Betonfestigkeit und schwächerer Bewehrung zu. Sie nimmt ferner mit wachsendem Q/T -Verhältnis zu, in den Bereichen, wo T und Q additiv wirken. Ein zunehmendes T/M -Verhältnis erzeugt eine größere Anzahl eng stehender Risse.
8. Die maximale Rißbreite nimmt mit kleiner werdendem Längs- und Bügelbewehrungsgrad, Betonfestigkeit, M/T -Verhältnis und Q/T -Verhältnis zu.

9. Bei höheren T/Q -Verhältnissen sind Bügel wirksamer als die aufgebogenen Eisen; das Gegenteil gilt für kleinere T/Q -Verhältnisse.
10. Bügelspannungen liegen im allgemeinen unter den nach der Fachwerktheorie (Rauschsche Formel) errechneten Werten. Im querkraftfreien Bereich sind alle Bügelschenkel etwa gleich beansprucht; dagegen waren sie im Querkraftbereich auf der Seite stärker beansprucht, wo T und Q additiv wirkten.
11. Die Bügelbeanspruchung ist größer für kleinere M/T -Verhältnisse, da offensichtlich die Bügelwirkung nur bei Torsion- bzw. bei Querkraftbeanspruchung zustande kommt.
12. Im querkraftfreien Bereich ist die Ausbildung einer praktisch rechteckigen Druckzone an der Balkenoberseite, im Querkraftbereich dagegen an der Balkenseite (bzw. einer dreieckigen Zone zwischen den Bruchmodellen 1 und 2), deutlich zu erkennen. Je größer der M/T -Verhältnis wird, desto größer wird die Druckzone.
13. Die Spannungen in der Längsbewehrung nehmen mit größer werdendem M/T -Verhältnis zu, und zwar sowohl im querkraftfreien als auch im querkraftbeanspruchten Bereich. Die Beanspruchung ist jedoch im Querkraftbereich kleiner, wegen des kleineren Biegemomentes. Außerdem blieb die Stahlspannung deutlich unter der Fließgrenze, so daß sich feststellen läßt, daß ein einfaches Superponieren der einerseits für die Torsionstraglast benötigten und andererseits für die volle Biegetragfähigkeit nach der n -freien Bemessung erzielten Bewehrungsmengen (die hier eingelegt wurden) für kombinierte Beanspruchung sehr weit auf der sicheren Seite liegt.
14. Ein sehr enger Abstand der Torsionslängsbewehrung trägt bei kombinierter Beanspruchung nichts wesentliches bei außer einem etwas besseren Rißverhalten.
15. In der Nähe des Momentennullpunktes ist eine "Konzentration" der Stahlspannung in der Längsbewehrung sichtbar, und zwar auf jener Balkenseite, wo T und Q additiv wirken. Dies deutet auf eine "Rotation" der zwei Balkenteile um eine in diesem Bereich gelegene Drehachse hin, wie z. B. von Lessig und anderen angenommen wurde.

16. Die Betonstauchungen sind größer in der mittleren Balkenhöhe als an den Kanten; dies ist auf das "Ausbiegen" der Betondruckstreben zurückzuführen. Die Stauchungen haben die größten Werte in der Diagonalrichtung also etwa in der Richtung der Druckstreben.
17. Die gemessenen Betonstauchungen in der Diagonalrichtung fallen wesentlich größer aus als die aus den vorhandenen Biegenormal- und Torsionsschubspannungen errechneten Werte der Hauptdehnungen. Dies bestätigt die Ansicht, daß die Hauptbeanspruchung der Betondruckstreben von dem "Verwindungseffekt" eines tordierten Balkens hervorgerufen wird.
18. Die Balkenverdrehung ist bis zum Rißbeginn dem Torsionsmoment praktisch linear proportional, wächst aber mit der Rißbildung rascher an, so daß sich zwischen dem $T-\vartheta$ -Diagramm und dem $\sigma-\epsilon$ -Diagramm eine Ähnlichkeit feststellen läßt. Mit dem Näherrücken zur Stahlfließgrenze wird das $T-\vartheta$ -Diagramm noch flacher. Die Verdrehung scheint ferner mit wachsendem T/M-Verhältnis abzunehmen. Das Vorhandensein einer Querkraft scheint dagegen die Balkenverdrehung zu vergrößern.
19. Bis zu etwa 10 bis 20 % der Traglast war bei diesen Versuchen kein Torsionssteifigkeitsabfall festzustellen, so daß der volle Querschnitt wirksam bleibt. Danach wurde ein kontinuierlicher Steifigkeitsabfall beobachtet, bis - bei etwa 60 bis 80% der Traglast - der endgültige Mechanismus des gerissenen Zustandes voll ausgebildet wurde, so daß die Balkensteifigkeit weiter nur sehr gering abgebaut wurde.
20. Die Torsionssteifigkeit im Endzustand betrug nur noch 7 bis 15 % der Anfangssteifigkeit, also ein viel kleinerer Wert als der bei der Biegesteifigkeit. Bei der statischen Berechnung könnte man somit die Torsionssteifigkeit ohne großen Fehler vernachlässigen.

Es wird hierbei aber klar, daß die Torsionsbeanspruchung dort, wo sie für das Gleichgewicht erforderlich ist, im gerissenen Zustand zu großen Drehverformungen - und somit zu klaffenden Rissen - führt. Bei nicht vorgespannten Bauteilen bedarf dies der Wahl eines größeren Sicherheitsfaktors als er bei Biegebeanspruchung erforderlich wäre.

Summary

After a brief introduction and a historical background into the problem of reinforced and prestressed concrete structures in combined torsion a state of the art survey is given. The important torsion theories, which fall in three major categories, are introduced and compared with one another with the help of illustrations. The influence of important parameters affecting beam behaviour and ultimate load is critically examined. Based on this study an empirical formula for computing the carrying capacity is introduced. In a study of beam deformation, after the introduction of the available formulas and their comparison with experimental evidence, a satisfactory expression for calculating the beam stiffness is presented.

The second part of this report concerns itself with experiments on 11 reinforced concrete rectangular beams tested at the Institute of Material Technology and Reinforced Concrete of the Technical University Braunschweig under combined torsion. The test beams, conceived as a continuation of the Stuttgart Series VS (under pure torsion), had, accordingly, a cross section of 24 x 44 cm and were reinforced with Steel III b 6 mm diam. bars against torsion. For beams of the first series (T + M) a single span beam with a constant bending moment length of 1,0 m was chosen; for test beams under T + M + Q this arrangement gave a critical $\frac{a}{h}$ ratio of about 3,0. The two beams of the second test series had additional cantilevers, each 1,5 m long, for creating a moment inflexion point so that it may be possible to eliminate the effect of bending moment. The principal variables of this study were: the reinforcement, the T/M ratio and the T/Q ratio.

The important results of this study are briefly summarized as follows:

1. Irrespective of whether the chosen failure model is a space truss or a free body with a skewed failure surface one can speak of three basic modes of failure:

(a) Mode 1: This is the mode, originally introduced by Lessig, with the concrete compression zone at top and is the most frequent normal case for beams under T + M or T + M + Q.

(b) Mode 2: Also introduced by Lessig, has compression zone at the beam side and appears in beams under T or $T + Q$, as also under $T + M + Q$ when the bending moment is relatively small and the section is more or less symmetrically reinforced.

(c) Mode 3: Has the compression zone at the bottom and appears only in beams with a very weak top reinforcement.

Since a sudden transition from one mode to the other is physically very unlikely, it also appears possible to get a triangular compression zone in tests, as was found not only in these but in other tests as well.

This method of computation of the ultimate load, using one of the available failure mechanisms, naturally represents - according to the laws of the plastic theory - an upper bound solution of the torsion problem; the exactness of the calculated failure load then depends on how precisely the sectional faces have been considered (for example, the steel dowel forces, the shear or the torsional stresses in the uncracked concrete etc.).

2. The space truss theory and the equilibrium method of the skewed bending theory give identical results when the basic assumptions are same. Lessig's minimization procedure, on the other hand, gives a smaller failure load. This difference is probably due to the non consideration of certain internal forces in the equilibrium method.
3. The beams failing under $T + M$ showed an almost circular torsion-moment interaction, which is significantly different from the parabolic interaction one obtains on the basis of the truss theory. In unsymmetrically reinforced sections, principally under torsional loading, the failure mode 3 was critical. In this case the torsional capacity is increased under a simultaneously acting bending moment because the latter creates compression in the top steel which reduces the tension due to torsion thus causing an increase in the torsional failure load.
4. A design based on the present DIN 1045 ^{or the CEB/FIP-Code} leads to unnecessarily high safety factors which, moreover, are different for different torsion-moment ratios.

5. In the test beams which received shear steel in accordance with the partial shear coverage suggested by Leonhardt the web reinforcement proved so effective that failure occurred in the constant moment zone. In case in any future tests under $T + M + Q$ the influence of web steel were intended to be investigated it appears expedient to choose a weaker web steel than the one provided here. This point has been taken care of in the new tests on prestressed concrete beams being planned at Braunschweig.
6. The first cracking appeared at 10 to 15 % of the ultimate load. The crack inclination in the constant moment region was steeper for increasing $\frac{M}{T}$ ratios but became flatter as the ultimate load was approached so that at failure the inclination was not much different from 45° . As against this the cracks in the shear spans were inclined right from the beginning, their inclination being steeper on that side where torsion and shear force are subtractive. The deviation from the mean crack inclination was less than 5° .
7. The mean crack width increases with increasing concrete strength and weaker reinforcement, as also with increasing $\frac{Q}{T}$ ratios in those regions where T and Q are additive. Increasing $\frac{T}{M}$ ratios cause a larger number of closely spaced cracks.
8. The maximum crack width increases with decreasing reinforcement ratios, decreasing concrete strengths and decreasing $\frac{M}{T}$ ratios and $\frac{Q}{T}$ ratios.
9. Stirrups are more effective compared to bent up bars for larger $\frac{T}{Q}$ ratios; the opposite is valid for smaller $\frac{T}{Q}$ ratios.
10. In general the measured strains in the stirrups were smaller compared to the values computed on the basis of the space truss theory (Rausch's Formula). In the constant moment region the stirrup arms allaround were practically equally stressed; as against this the stirrups arms in the shear spans were heavily stressed on that side where T and Q were additive.

11. Stirrup strains are larger for smaller $\frac{M}{T}$ ratios, due to the fact that stirrups become effective only under a torsional or a shear loading.
12. A rectangular compression zone formed at the beam top in the constant moment region of all test beams. As against that, in the shear span the compression zone appeared on the side (in some cases a triangular zone between modes 1 and 2). The compression zone was larger for larger $\frac{M}{T}$ ratios.
13. Longitudinal steel stress increased with increasing $\frac{M}{T}$ ratios throughout the beam length; the stress was smaller in the shear span due to a smaller bending moment. The steel stress, moreover, remained below the yield stress indicating that a simple superposition of the steel quantities required in pure torsion and in pure bending (as was done in these tests) is, for combined torsion, very much on the safe side.
14. Closely spaced longitudinal steel bars (for torsion) do not contribute extra to the beam strength except perhaps a better cracking behaviour.
15. A "concentration" of stress in the longitudinal steel was visible in the vicinity of the moment inflexion point on that side of the beam where T and Q are additive, indicating a mutual "rotation" of the two beam halves about an axis (as also assumed by Lessig and others).
16. Concrete strains were larger at middepth than near beam corners; this due to the "buckling" of the "compression struts". The strains are, moreover, larger in the diagonal direction, i.e., in the direction of the "struts".
17. Measured concrete strains in the diagonal direction were larger than the principal strains computed from the actual flexural normal and the torsional shear stresses. This supports the contention that the principal cause of the stressing of concrete struts is the "warping" effect due to torsion.

18. Before the appearance of cracking the twist is linearly proportional to the torque but increases more rapidly thereafter. There appears a similarity between the $T-\phi$ and the $\sigma-\epsilon$ diagrams. As the yield limit is approached the $T-\phi$ diagram becomes still flatter. The twist appears to decrease with increasing $\frac{T}{M}$ ratio; on the other hand shear force appears to increase it.
19. No reduction of torsional stiffness was apparant in these tests upto about 10 to 20 % of the ultimate load, ie the full cross section remained effective. Subsequently a continuous reduction in the stiffness was observed till, at about 60 to 80% of the failure load, the final carrying mechanism was fully developed and further reduction in beam stiffness was only minimal.
20. The final torsional stiffness remained only 7 to 15 % of the initial stiffness, ie, a much smaller value compared to the cracked flexural stiffness. It is, therefore, possible to ignore the torsional stiffness in the moment distribution of space structures.

It must, however, be kept in mind that : torsion, where it is necessary for statical equilibrium, leads to very large deformations in the cracked beam so that, in non prestressed structures, it becomes necessary to choose a much larger safety factor than is needed in pure bending.

11. Literaturverzeichnis

- [1] Anderson, P., Rectangular concrete sections under torsion. Journal of the American Concrete Institute, Proc. Vol. 34, No. 1, 1937, S. 1 bis 11.
- [2] Nylander, H., Wridning och vridningsinspännig vid betongkonstruktioner (in Schwedisch mit einer englischen Zusammenfassung). Statens Kommitte för Byggnadsforskning, Meddelanden, Stockholm, Nr. 3, 1945, S. 138.
- [3] Cowan, H. T., An elastic theory for the torsional strength of rectangular reinforced concrete beams. Magazine of Concrete Research (London), Vol. 2, No. 4, Juli 1950, S. 3 bis 8.
- [4] Cowan, H. T., The strength of plain, reinforced and prestressed concrete under the action of combined stresses with particular reference to the combined bending and torsion of rectangular sections. Magazine of Concrete Research (London), Vol. 5, No. 14, Dez. 1953, S. 75 bis 86.
- [5] Rausch, E., Drillung (Torsion), Schub und Scheren im Stahlbetonbau, Deutscher Ingenieur-Verlag G.m.b.H., Düsseldorf 1953, S. 168.
- [6] Cowan, H. J., und S. Armstrong, Experiments on the strength of reinforced and prestressed concrete beams and of concrete encased steel joists in combined bending and torsion. Magazine of Concrete Research (London), Vol. 7, No. 19, März 1955, S. 3 bis 20.
- [7] Cowan, H. J., Reinforced and prestressed concrete in torsion. Edward Arnold, London 1965, S. 138.
- [8] Brown, E. I., Strength of reinforced concrete T-beams under combined direct shear and torsion. Journal of the American Concrete Institute, Vol. 51, No. 9, Mai 1955, S. 889 bis 902.
- [9] Cowan, H. J., Torsion in reinforced and prestressed concrete beams. Journal of the Institution of Engineers Australia, V. 28, Sept. 1956, S. 235 bis 240.
- [10] Ernst, G., Ultimate torsional properties of rectangular reinforced concrete beams. Journal of the American Concrete Institute, V. 29, No. 4, Okt. 1957, S. 341 bis 356.
- [11] Humphreys, R., Torsional properties of prestressed concrete. The Structural Engineer, V. 35, No. 6, Juni 1957, S. 213 bis 224.
- [12] Lessig, N. N., Theoretische und experimentelle Untersuchung der Stahlbetonbalken unter kombinierter Biege- und Torsionsbeanspruchung (in Russisch). Theory of design and construction of reinforced concrete structures (Moscow), 1958.
- [13] Lessig, N. N., Determination of the load bearing capacity of reinforced concrete elements with rectangular cross section under simultaneous action of flexure and torsion (in Russisch). Beton i Zhelezobeton (Moskau), Nr. 3, März 1959, S. 109 bis 113. Englische Übersetzung von SLA Translation Centre, John Crerar Library, Chicago, Illinois 60616, verfügbar.

- [14] Lessig, N. N., Determination of the load bearing capacity of reinforced concrete elements with rectangular cross section subjected to flexure and torsion (in Russisch). Institut Betona i Zhelezobetona, Trudy 5, 1959, S. 5 bis 28. Englische Übersetzung von Portland Cement Association, Skokie, Illinois als Foreign Literature Study No. 371 verfügbar.
- [15] Chinenkov, Yu. V., Study of the behaviour of reinforced concrete elements in combined flexure and torsion (in Russisch). Institut Betona i Zhelezobetona, Trudy 5, 1959, S. 29 bis 53. Englische Übersetzung als FLS Nr. 370 wie bei [14] verfügbar.
- [16] Lyalin, I. M., Experimental studies of the behaviour of reinforced concrete beams with rectangular cross section subjected to combined action of transverse shear, flexural and torsional moment (in Russisch). Institut Betona i Zhelezobetona, Trudy 5, 1959, S. 54 bis 71. Englische Übersetzung wie bei [13] verfügbar.
- [17] Cowan, H. J., Design of beams subject to torsion related to the new Australian Code. Journal of the American Concrete Institute, Proc. Vol. 56, No. 7, Jan. 1960, S. 591 bis 618.
- [18] Gardner, R. P. M., The behaviour of prestressed concrete I-beams under combined bending and torsion. Technical Report TRA/329, Cement and Concrete Association (England), Febr. 1960.
- [19] Zia, P., Research in torsion of prestressed members, Journal of the Prestressed Concrete Institute, V. 5, 1960, S. 35 bis 40.
- [20] Kemp, E. L., M. A. Sozen und C. P. Siess, Torsion in reinforced concrete, Civil Engineering Studies, University of Illinois, Structural Research Series No. 226, Sept. 1961.
- [21] Zia, P., Torsional strength of prestressed concrete members. Journal of the American Concrete Institute, V. 32, No. 10, April 1961, S. 1337 - 1359.
- [22] Lessig, N. N., Investigation of cases of concrete failure in rectangular reinforced concrete elements subjected to combined bending and torsion. Ein Kapitel im Buch "Design of reinforced concrete structures" von A. A. Gvozdev, 1961, S. 229 bis 271 (in Russisch). Englische Übersetzung wie bei [13] verfügbar.
- [23] Lessig, N. N., Investigation of cases of failure due to crushing of concrete for rectangular reinforced concrete elements subjected to combined bending and torsion (in Russisch). Institut Betona i Zhelezobetona (Moskau), Trudy 23, 1961.
- [24] Swamy, N., The behaviour and ultimate strength of prestressed concrete hollow beams under combined bending and torsion, Magazine of Concrete Research (London), V. 14, No. 40, März 1962, S. 13 bis 24.

- [25] Yudin, V. K., Determination of the load bearing capacity of reinforced concrete elements of rectangular cross section under combined bending and torsion. Beton i Zhelezobeton (Moskau), Nr. 6, Juni 1962, S. 265 bis 268 (in Russisch). Englische Übersetzung als FLS 377 wie bei [14] verfügbar.
- [26] Reeves, J. S., Prestressed concrete T-beams under combined bending and torsion. Technical Report TRA/364, Cement and Concrete Association (London), Dez. 1962.
- [27] Branson, D. E., Instantaneous and time-dependent deflections of simple and continuous reinforced concrete beams. Report No. 7, Alabama Highway Research Report, Bureau of Public Roads, Aug. 1963.
- [28] Yudin, V. K., The behaviour of reinforced concrete beams with rectangular cross sections subjected to combined torsion and flexure. Institut Betona i Zhelezebetona, Trudy 1, Jan. 1964, S. 30 bis 35 (in Russisch). Englische Übersetzung als FLS 431 wie bei [14] verfügbar.
- [29] Fisher, G. P. und P. Zia, Review of Code requirements for torsion design. Journal of the American Concrete Institute, V. 61, No. 1, Jan. 1964, S. 1 bis 44.
- [30] Gesund, H. und L. A. Boston, Ultimate strength in combined bending and torsion of reinforced concrete beams containing only longitudinal reinforcement. Journal of the American Concrete Institute, V. 61, No. 11, Nov. 1964, S. 1453 bis 1471.
- [31] Gesund, H., F. J. Schuette, G. R. Buchanan und G. A. Gray, Ultimate strength in combined bending and torsion on concrete beams containing both longitudinal and transverse reinforcement. Journal of the American Concrete Institute, V. 61, No. 12, Dez. 1964, S. 1509 bis 1521.
- [32] Walther, R., Ergebnisse und Lehren aus Torsions- und Schubversuchen an vorgespannten Hohlkastenträgern. Schweizerische Bauzeitung, 83. Jahrgang, 1965, Hefte 1 und 2.
- [33] Murashkin, G. V., Influence of prestressing on the carrying capacity and cracking load of reinforced concrete beams under combined bending and torsion. Beton i Zhelezobeton (Moskau), Nr. 10, 1965 (in Russisch).
- [34] Evans, R. H. und S. Sarkar, A method of ultimate strength design of reinforced concrete beams in combined bending and torsion. The Structural Engineer, V. 43, No. 10, Okt. 1965, S. 337 bis 344.
- [35] Okada, K., S. Nishibayashi und T. Abe, Experimental studies on the strength of rectangular reinforced and prestressed concrete beams under combined flexure and torsion. Transactions of the Japanese Society of Civil Engineers, No. 131, Juli 1966, S. 39 bis 51.
- [36] Walsh, P. F., M. P. Collins, F. E. Archer und A. S. Hall, The ultimate strength design of rectangular reinforced concrete beams subjected to combined torsion, bending and shear. Civil Engineering Transactions, The Institution of Engineers, Australia, Vol. CE 8, No. 2, Okt. 1966, S. 143 bis 157.

- [37] Mukherjee, P. R. und E. L. Kemp, Ultimate torsional strength of plain, prestressed and reinforced concrete members of rectangular cross section. Civil Engineering Studies No. 2003, West Virginia University, Morgantown, W. Va., 1967.
- [38] McMullen, A.E., und J. Warwaruk, The torsional strength of rectangular reinforced concrete beams subjected to combined loading. Department of Civil Engineering, University of Alberta, Canada, Report No. 11, Edmonton, Juli 1967, S. 254.
- [39] Goode, C. D. und M. A. Helmy, Design of rectangular beams subjected to combined bending and torsion. Concrete (London), Vol. 1, No. 7, Juli 1967, S. 241 bis 244.
- [40] Dilger, W., Anfängliche und nachträgliche Durchbiegung infolge Querkraft bei Stahlbetonbalken im Zustand II. Beton und Stahlbetonbau, 62. Jahrgang, Heft 9, S. 212 bis 217.
- [41] Walsh, P. F., M. P. Collins und F. E. Archer, The flexure-torsion and shear-torsion interaction behaviour of rectangular reinforced concrete beams. Civil Engineering Transactions, The Institution of Engineers, Australia, Vol. CE 9, No. 2, Okt. 1967, S. 313 bis 320.
- [42] Helmy, M. A., Strength and design of reinforced concrete rectangular beams subjected to torsion, bending and shear. Bulletin of the Faculty of Engineering, Alexandria University, Vol. VI, 1967, S. 467 bis 490.
- [43] Mattock, A. H., C. J. Birkland und M. E. Hamilton, Strength of reinforced concrete beams without web reinforcement in combined torsion, shear and bending. The Trend in Engineering, University of Washington, V. 19, No. 4, Okt. 1967, S. 8 bis 12 und 29.
- [44] Farmer, L. E. und P. M. Ferguson, T-beams under combined bending, shear and torsion. Journal of the American Concrete Institute, Proc. V. 64, No. 11, Nov. 1967, S. 757 bis 766.
- [45] Ramakrishna, V. und B. Vijayarangan, The torque-twist relationship for rectangular beams. Concrete, Vol. 1, No. 11, Nov. 1967, S. 383 bis 386.
- [46] Ersoy, U. und P. M. Ferguson, Behaviour and strength of concrete L-beams under combined torsion and shear. Journal of the American Concrete Institute, Proc. V. 64, No. 12, Dez. 1967, S. 793 bis 811.
- [47] Hsu, T. T. C., Torsion of structural concrete - Interaction surface for combined torsion, shear and bending in beams without stirrups. Journal of the American Concrete Institute, Proc. V. 65, No. 1, Jan. 1968, S. 51 bis 60.
- [48] Victor, D. J. und P. M. Ferguson, Reinforced concrete T-beams without stirrups under combined moment and torsion. Journal of the American Concrete Institute, Proc. V. 65, No. 1, Jan. 1968, S. 29 bis 36.

- [49] Hsu, T. T. C., Ultimate Torque of reinforced rectangular beams. Journal of the Structural Division, American Society of Civil Engineers, Vol. 94, No. ST 2, Febr. 1968, S. 485 bis 510.
- [50] Klus, J. P., Ultimate strength of reinforced concrete beams in combined torsion and shear. Journal of the American Concrete Institute, Proc. V. 65, No. 3, März 1968, S. 210 bis 216.
- [51] Gesund, H., D. G. Mills und V. M. Martin, Ultimate strength tests of reinforced concrete beams in combined torsion, bending and shear. Publications, International Association for Bridge and Structural Engineering, V. 28/II, 1968, S. 31 bis 48.
- [52] Collins, M. P., P. F. Walsh, F. E. Archer und A. S. Hall, Reinforced concrete in torsion. School of Civil Engineering, University of New South Wales, UNICIV Report No. R-31, Kensington, Australia, März 1968, S. 328.
- [53] Hsu, T. T. C., Torsion of structural concrete - Uniformly prestressed rectangular members without web reinforcement. Journal of the Prestressed Concrete Institute (Chicago), Vol. 13, No. 2, April 1968, S. 34 bis 44.
- [54] Torsion of Structural Concrete. American Concrete Institute (Detroit), Special Publication SP-18, 1968, S. 505.
- [55] Victor, D. J. und P. M. Ferguson, Beams under distributed load creating moment, shear and torsion. Journal of the American Concrete Institute, Proc. V. 65, No. 4, April 1968, S. 295 bis 308.
- [56] Lampert, P. und B. Thürlimann, Torsionsversuche an Stahlbetonbalken. Institut für Baustatik, ETH Zürich, Bericht Nr. 6506-2, Juni 1968, S. 101.
- [57] Goode, C. D. und M. A. Helmy, Bending and torsion of reinforced concrete beams, Magazine of Concrete Research (London), Vol. 20, No. 64, Sept. 1968, S. 155 bis 166.
- [58] Kuyt, B., The ultimate torsional resistance of rectangular reinforced concrete beams. Concrete (London), Vol. 2, No. 12, Dez. 1968, S. 522 bis 527.
- [59] Lampert, P., und B. Thürlimann, Torsions-Biege-Versuche an Stahlbetonbalken. Institut für Baustatik, ETH Zürich, Bericht Nr. 6506-3, Jan. 1969, S. 116.
- [60] Hsu, T. T. C., und E. L. Kemp, Background and practical application of tentative design criteria for torsion. Journal of the American Concrete Institute, Proc. Vol. 66, No. 1, Jan. 1969, S. 12 bis 23.
- [61] Collins, M. P., The normal moment yield criterion applied to beams in flexure-torsion. International conference on shear, torsion and bond in reinforced and prestressed concrete, Coimbatore, India, Jan. 1969, Draft Copy, S. 18.

- [62] Mirza, M. S. und J. O. McCutcheon, Behaviour of reinforced Concrete beams under combined bending, shear and torsion. Journal of the American Concrete Institute, Proc. V. 66, No. 5, Mai 1969, S. 421 bis 427.
- [63] Iyengar, K. T. S., und B. Vijayarangan, Factors influencing the strength of reinforced concrete beams under combined bending and torsion. Magazine of Concrete Research (London), Vol. 21, No. 67, Juni 1969, S. 91 bis 102.
- [64] Bishara, A., Prestressed concrete beams under combined torsion, bending and shear. Journal of the American Concrete Institute, Proc. V. 66, No. 7, Juli 1969, S. 525 bis 538.
- [65] Liao, H. M. und P. M. Ferguson, Combined torsion in reinforced concrete L-beams with stirrups. Journal of the American Concrete Institute, Proc. Vol. 66, No. 12, Dez. 1969, S. 986 bis 993.
- [66] Elfgrén, L., und I. Karlsson, Vridning av betongkonstruktioner, En litteraturöversikt (in Schwedisch). Division of Concrete Structures, Chalmers University of Technology, Report 69:2, Göteborg 1969, S. 170.
- [67] Bay, H., Die Achsverdrehung aus Torsion im Stadium II. Festschrift Rüschi: Stahlbetonbau; Berichte aus Forschung und Praxis, Verlag von Wilhelm Ernst und Sohn, Berlin-München, 1969, S. 167 bis 170.
- [68] Lampert, P., Bruchwiderstand von Stahlbetonbalken unter Torsion und Biegung. Schweizerische Bauzeitung, Vol. 88, Nr. 5, Jan. 1970, S. 85 bis 95.
- [69] Lampert, P., Bruchwiderstand von Stahlbetonbalken unter Torsion und Biegung. Dissertation No. 4445, ETH Zürich 1970, S. 190.
- [70] Behera, U., K. S. Rajagopalan und P. M. Ferguson, Reinforcement for torque in spandrel L-beams, Journal of the Structural Division, Proc. American Society of Civil Engineers, V. 96, ST 2, Febr. 1970, S. 371 bis 380.
- [71] McMullen, A., und J. Warwaruk, Concrete beams in bending, torsion and shear. Journal of the Structural Division, American Society of Civil Engineers, Proc. Vol. 96, ST 5, Mai 1970, S. 885 bis 903.
- [72] Zia, P., What do we know about torsion in concrete members? Journal of the Structural Division, American Society of Civil Engineers, Proc. Vol. 96, ST 6, Juni 1970, S. 1185 bis 1199.
- [73] Behera, U., und P. M. Ferguson, Torsion, shear and bending on stirrups L-beams. Journal of the Structural Division, American Society of Civil Engineers, Proc. Vol. 96, St 7, Juli 1970, S. 1271 bis 1286.
- [74] Bay, H., Die Achsverdrehung aus Torsion im Stadium II bei gleichzeitiger Einwirkung von Biegemoment, Querkraft und Normalkraft. Beton und Stahlbetonbau, Heft 7, Juli 1970, S. 164 bis 168.
- [75] Pandit, G. S., Ultimate torque of rectangular reinforced concrete beams. Journal of the Structural Division, American Society of Civil Engineers, Proc. Vol. 96, ST 9, Sept. 1970, S. 1987 bis 1995.

- [76] Rahlwes, K., Zur Torsionssteifigkeit von Stahlbetonrechteckquerschnitten. Beton und Stahlbetonbau, Heft 9, Sept. 1970, S. 226 bis 228.
- [77] Swann, R. A., Experimental basis for a design method for rectangular reinforced concrete beams in torsion. Cement and Concrete Association (London), Technical Report 42.452, Dez. 1970, S. 38.
- [78] Victor, D. J., Effective flange width in Torsion. Journal of the American Concrete Institute, Proc. V. 68, No. 1, Jan. 1971, S. 42 bis 46.
- [79] Lampert, P., P. Lüchinger und B. Thürlimann, Torsionsversuche an Stahl- und Spannbetonbalken. Institut für Baustatik, ETH Zürich, Bericht Nr. 6506-4, Febr. 1971, S. 99.
- [80] Kirk, D. W., und S. D. Lash, T-beams subjected to combined bending and torsion. Journal of the American Concrete Institute, Proc. V. 68, No. 2, Febr. 1971, S. 150 bis 159.
- [81] Swann, R.A., The effect of size on the torsional strength of rectangular reinforced concrete beams. Cement and Concrete Association (London), Technical Report 42.453, März 1971, S. 8.
- [82] Helmy, M. A., Torsional strength of rectangular concrete beams in bridge design. American Concrete Institute (Detroit), Special Publication SP-26, 1971, S. 496 bis 522.
- [83] Lampert, P., und B. Thürlimann, Ultimate strength and design of reinforced concrete beams in torsion and bending. International Association of Bridge and Structural Engineering, Publications, Vol. 31, 1971, S. 107 bis 131.
- [84] Effgren, L., Reinforced concrete beams loaded in combined torsion, bending and shear. Division of Concrete Structures, Chalmers University of Technology, Göteborg, Publication 71:3, 1972.
- [85] Lampert, P., Postcracking stiffness of reinforced concrete beams in torsion and bending. Department of Civil Engineering, University of Toronto (Canada), Publication No. 71-20, Febr. 1971, S. 66.
- [86] Collins, M. P., und P. Lampert, Redistribution of moments at cracking - the key to simpler torsion design? Department of Civil Engineering, University of Toronto (Canada), Publication No. 71-21, Febr. 1971, S. 49.
- [87] Mukherjee, P. R., und J. Warwaruk, Torsion, bending and shear in prestressed concrete. Journal of the Structural Division, American Society of Civil Engineers, ST 4, April 1971, S. 1063 bis 1079.
- [88] Karlsson, I., Torsional stiffness of reinforced concrete structures in pure torsion. Division of Concrete Structures, Chalmers University of Technology, Göteborg, Report 71:1, Juni 1971, S. 104.

- [89] Herzog, M., Torsionsfestigkeit und Steifigkeit von unbewehrten, schlaff bewehrten und vorgespannten Betonstäben nach Versuchen. Beton und Stahl-Betonbau, Nr. 10, Okt. 1971, S. 244 bis 253.
- [90] Rajagopalan, K. S., U. Behera und P. M. Ferguson, Partially overreinforced concrete beams under pure torsion. Journal of the American Concrete Institute, Proc. V. 68, No. 10, Okt. 1971, S. 740 bis 747.
- [91] Syamal, P. K., M. S. Mirza und D. P. Ray, Plain and reinforced concrete L-beams under combined flexure, shear and torsion. Journal of the American Concrete Institute, Proc. V. 68, No. 11, Nov. 1971, S. 848 bis 860.
- [92] Kuyt, B., A theoretical investigation of ultimate torque as calculated by truss theory and by the Russian ultimate equilibrium method. Magazine of Concrete Research (London), Vol. 23, No. 77, Dez. 1971, S. 155 bis 160.
- [93] Lampert, P., Torsion and bending in reinforced and prestressed concrete members. Proceedings, The Institution of Civil Engineers (London), Paper 7430, Vol. 50, Dez. 1971, S. 487 bis 505.
- [94] Rajagopalan, K. S., und P. M. Ferguson, Distributed loads creating combined torsion, bending and shear on L-beams with stirrups. Journal of the American Concrete Institute, Proc. V. 69, No. 1, Jan. 1972, S. 46 bis 54.
- [95] Lampert, P., und B. Thürlimann, Ultimate strength and design of reinforced concrete beams in torsion and bending. Institute of Structural Engineering, ETH Zürich, Bericht Nr. 42, Jan. 1972, S. 107 bis 131.
- [96] Kuyt, B., A method for ultimate strength design of rectangular reinforced concrete beams in combined torsion, bending and shear. Magazine of Concrete Research (London), Vol. 23, No. 78, März 1972, S. 15 bis 24.
- [97] Lampert, P., und M. P. Collins, Torsion, bending and confusion - An attempt to establish the facts. Journal of the American Concrete Institute, Proc. V. 69, No. 8, August 1972, S. 500 bis 504.
- [98] Kirk, D. W., und N. C. Loveland, Unsymmetrically reinforced T-beams subject to combined bending and torsion. Journal of the American Concrete Institute, Proc. V. 69, No. 8, Aug. 1972, S. 492 bis 499.
- [99] Karlsson, I., und L. Elfgrén, Torsional stiffness of reinforced concrete members subjected to pure torsion. Magazine of Concrete Research (London), Vol. 24, No. 80, Sept. 1972, S. 149 bis 156.
- [100] Analysis of Structural Systems for Torsion. American Concrete Institute (Detroit), Special Publication SP-35, 1973.
- [101] Vijaya Rangan, B., und A. S. Hall, Strength of rectangular prestressed concrete beams in combined torsion, bending and shear. Journal of the American Concrete Institute, Proc. V. 70, No. 4, April 1973, S. 270 bis 278.

- [102] Victor, D. J., und R. Muthukrishnan, Effect of stirrups on ultimate torque of reinforced concrete beams. Journal of the American Concrete Institute, Proc. V. 70, No. 4, April 1973, S. 300 bis 306.
- [103] Hsu, T. T. C., Post cracking torsional rigidity of reinforced concrete sections. Journal of the American Concrete Institute, Proc. V. 70, No. 5, Mai 1973.
- [104] Ojha, S. K., und K. Kordina, Berechnung der Balkentragfähigkeit bei kombinierter Torsion (wird in Kürze in "Die Bautechnik" veröffentlicht).
- [105] Ojha, S. K., Die Steifigkeit Stahlbetonrechteckbalken bei kombinierter Torsion (Veröffentlichung in Vorbereitung).
- [106] Beton-Kalender 1973. Verlag von Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin, München, Düsseldorf.

T A B E L L E N

LAST- STUFE	P	M (P)	M (G)	M (P+G)	P (T)	T (P)	T (G)	T (P+G)	$\frac{M(P+G)}{T(P+G)}$	$\frac{T}{T}$ (U)	$\frac{M}{T}$ U(TH)	$\frac{P}{T}$ (U)	$\frac{T}{T}$ U(VS2)
	(kg)	(mkg)	(mkg)	(mkg)	(kg)	(mkg)	(mkg)	(mkg)					
1	750	938	400	1338	240	228	60	288	5,9	0,1074	0,0640	0,0435	0,144
2	1500	1875	400	2275	480	456	60	516	4,4	0,1924	0,1089	0,0870	0,258
3	2250	2813	400	3213	720	684	60	744	4,3	0,2774	0,1537	0,1304	0,372
4	3000	3750	400	4150	960	912	60	972	4,3	0,3624	0,1986	0,1739	0,486
5	3750	4688	400	5088	1200	1140	60	1200	4,2	0,4474	0,2434	0,2174	0,600
6	4500	5625	400	6025	1440	1368	60	1428	4,2	0,5324	0,2883	0,2609	0,714
1	1500	1875	400	2275	240	228	60	288	7,9	0,1074	0,1089	0,0870	0,144
2	3000	3750	400	4150	480	456	60	516	8,0	0,1924	0,1986	0,1739	0,258
3	4500	5625	400	6025	720	684	60	744	8,1	0,2774	0,2883	0,2609	0,372
4	6000	7500	400	7900	960	912	60	972	8,1	0,3624	0,3780	0,3478	0,486
5	7500	9375	400	9775	1200	1140	60	1200	8,1	0,4474	0,4677	0,4348	0,600
OL	8250	10313	400	10713	1320	1254	60	1314	8,2	0,4899	0,5126	0,4783	0,657
UL	4500	5625	400	6025	720	684	60	744	8,1	0,2774	0,2883	0,2609	0,372
1	6000	7500	400	7900	960	912	60	972	8,1	0,3624	0,3780	0,3478	0,486
2	7500	9375	400	9775	1200	1140	60	1200	8,1	0,4474	0,4677	0,4348	0,600
3	8250	10313	400	10713	1320	1254	60	1314	8,2	0,4899	0,5126	0,4783	0,657
4	9000	11250	400	11650	1440	1368	60	1428	8,2	0,5324	0,5574	0,5217	0,714
5	9750	12188	400	12588	1560	1482	60	1542	8,2	0,5749	0,6023	0,5652	0,771
6	10500	13125	400	13525	1680	1596	60	1656	8,2	0,6174	0,6471	0,6087	0,828
7	11250	14063	400	14463	1800	1710	60	1770	8,2	0,6600	0,6920	0,6522	0,885
8	12000	15000	400	15400	1920	1824	60	1884	8,2	0,7025	0,7368	0,6957	0,942
9	12750	15938	400	16338	2040	1938	60	1998	8,2	0,7450	0,7817	0,7391	0,999
10	13500	16875	400	17275	2160	2052	60	2112	8,2	0,7875	0,7787	0,7826	1,056
11	15000	18750	400	19150	2400	2280	60	2340	8,2	0,8725	0,9163	0,8696	1,170
12	16500	20625	400	21025	2640	2508	60	2568	8,2	0,9575	1,0060	0,9565	1,284
13	17250	21563	400	21963	2760	2622	60	2682	8,2	1,0000	1,0509	1,0000	1,341

LAST- STUFE	P	M (P)	M (G)	M (P+G)	P (T)	T (P)	T (G)	T (P+G)	$\frac{M(P+G)}{T(P+G)}$	$\frac{T}{T}$ (U)	$\frac{M}{M}$ U(TH)	$\frac{P}{P}$ (U)	$\frac{T}{T}$ U(VS2)
	(kg)	(mkg)	(mkg)	(mkg)	(kg)	(mkg)	(mkg)	(mkg)					
1	1500	1875	400	2275	640	480	0	480	4.7	0.1177	0.1089	0.1177	0.240
2	3000	3750	400	4150	1280	960	0	960	4.3	0.2353	0.1986	0.2353	0.480
3	3750	4688	400	5088	1600	1200	0	1200	4.2	0.2941	0.2434	0.2941	0.600
4	4500	5625	400	6025	1920	1440	0	1440	4.2	0.3529	0.2883	0.3529	0.720
5	6000	7500	400	7900	2560	1920	0	1920	4.1	0.4706	0.3780	0.4706	0.960
6	6750	8438	400	8838	2880	2160	0	2160	4.1	0.5294	0.4228	0.5294	1.080
OL	6750	8438	400	8838	2880	2160	0	2160	4.1	0.5294	0.4228	0.5294	1.080
UL	4200	5250	400	5650	1800	1350	0	1350	4.2	0.3309	0.2703	0.3309	0.675
1	1500	1875	400	2275	640	480	0	480	4.7	0.1177	0.1089	0.1177	0.240
2	3000	3750	400	4150	1280	960	0	960	4.3	0.2353	0.1986	0.2353	0.480
3	4500	5625	400	6025	1920	1440	0	1440	4.2	0.3529	0.2883	0.3529	0.720
4	6000	7500	400	7900	2560	1920	0	1920	4.1	0.4706	0.3780	0.4706	0.960
5	6750	8438	400	8838	2880	2160	0	2160	4.1	0.5294	0.4228	0.5294	1.080
6	7500	9375	400	9775	3200	2400	0	2400	4.1	0.5294	0.4677	0.5882	1.200
7	8250	10313	400	10713	3520	2640	0	2640	4.1	0.6471	0.5126	0.6471	1.340
8	9000	11250	400	11650	3840	2880	0	2880	4.0	0.7059	0.5574	0.7059	1.440
9	9750	12188	400	12588	4160	3120	0	3120	4.0	0.7647	0.6023	0.7647	1.560
10	10125	12656	400	13056	4320	3240	0	3240	4.0	0.7941	0.6247	0.7941	1.620
11	10500	13125	400	13525	4480	3360	0	3360	4.0	0.8235	0.6471	0.8235	1.680
12	10875	13594	400	13994	4640	3480	0	3480	4.0	0.8529	0.6696	0.8529	1.740
13	11250	14063	400	14463	4800	3600	0	3600	4.0	0.8824	0.6920	0.8824	1.800
14	12000	15000	400	15400	5120	3840	0	3840	4.0	0.9412	0.7368	0.9412	1.920
15	12750	15938	400	16338	5440	4080	0	4080	4.0	1.0000	0.7817	1.0000	2.040

LAST- STUFE	P	M (P)	M (G)	M (P+G)	P (T)	T (P)	T (G)	T (P+G)	$\frac{N(P+G)}{T(P+G)}$	$\frac{T}{T}$ (U)	$\frac{M}{P}$ U(TH)	$\frac{P}{T}$ (U)	$\frac{T}{T}$ U(VS ²)
	(kg)	(mkg)	(mkg)	(mkg)	(kg)	(mkg)	(mkg)	(mkg)					
1	750	938	400	1338	512	384	0	384	3.5	0.0910	0.0640	0.0910	0.192
2	1500	1875	400	2275	1024	768	0	768	3.0	0.1818	0.1089	0.1818	0.384
3	2250	2813	400	3213	1536	1152	0	1152	2.8	0.2727	0.1537	0.2727	0.576
4	3000	3750	400	4150	2048	1536	0	1536	2.7	0.3636	0.1986	0.3636	0.768
5	3750	4688	400	5088	2560	1920	0	1920	2.7	0.4545	0.2434	0.4545	0.960
6	4500	5625	400	6025	3072	2304	0	2304	2.6	0.5455	0.2883	0.5455	1.152
7	5000	6250	400	6650	3412	2559	0	2559	2.6	0.6058	0.3182	0.6058	1.280
OL	5000	6250	400	6650	3412	2559	0	2559	2.6	0.6058	0.3182	0.6058	1.280
UL	2250	2813	400	3213	1536	1152	0	1152	2.8	0.2727	0.1537	0.2727	0.576
1	1500	1875	400	2275	1024	768	0	768	3.0	0.1818	0.1089	0.1818	0.384
2	2250	2813	400	3213	1536	1152	0	1152	2.8	0.2727	0.1537	0.2727	0.576
3	3000	3750	400	4150	2048	1536	0	1536	2.7	0.3636	0.1986	0.3636	0.768
4	3750	4688	400	5088	2560	1920	0	1920	2.7	0.4545	0.2434	0.4545	0.960
5	4500	5625	400	6025	3072	2304	0	2304	2.6	0.5455	0.2883	0.5455	1.152
6	5250	6563	400	6963	3584	2688	0	2688	2.6	0.6364	0.3331	0.6364	1.344
7	6000	7500	400	7900	4096	3072	0	3072	2.6	0.7273	0.3780	0.7273	1.536
8	6750	8438	400	8838	4608	3456	0	3456	2.6	0.8182	0.4228	0.8182	1.728
9	7500	9375	400	9775	5120	3840	0	3840	2.5	0.9091	0.4677	0.9091	1.920
10	7875	9844	400	10244	5376	4032	0	4032	2.5	0.9546	0.4901	0.9546	2.016
11	8250	10313	400	10713	5632	4224	0	4224	2.5	1.0000	0.5126	1.0000	2.114

Tabelle 3.

LAST-STUFE	P	M (P)	M (G)	M (P+G)	P (T)	T (P)	T (G)	T (P+G)	$\frac{M(P+G)}{T(P+G)}$	$\frac{T}{T}$ (U)	$\frac{M}{M}$ U(TH)	$\frac{P}{P}$ (U)	$\frac{T}{T}$ U(VS 2)	
	(kg)	(mkg)	(mkg)	(mkg)	(kg)	(mkg)	(mkg)	(mkg)						
1	750	937,5	400	1337,5	320	240		0	240	5,57	0,0667	0,0640	0,0667	0,120
2	1500	1875,0	400	2275,0	640	480		0	480	4,80	0,1333	0,1089	0,1333	0,240
3	2250	2812,5	400	3212,5	960	720		0	720	4,46	0,2000	0,1537	0,2000	0,360
4	3000	3750,0	400	4150,0	1280	960		0	960	4,32	0,2667	0,1986	0,2667	0,480
5	3750	4687,5	400	5087,5	1600	1200		0	1200	4,24	0,3333	0,2434	0,3333	0,600
6	4500	5625,0	400	6025,0	1920	1440		0	1440	4,18	0,4000	0,2883	0,4000	0,720
7	5250	6562,5	400	6962,5	2240	1680		0	1680	4,14	0,4667	0,3331	0,4667	0,840
8	6000	7500,0	400	7900,0	2560	1920		0	1920	4,11	0,5333	0,3780	0,5333	0,960
9	6750	8437,5	400	8837,5	2880	2160		0	2160	4,09	0,5999	0,4228	0,5999	1,080
OL	6750	8437,5	400	8837,5	2880	2160		0	2160	4,09	0,5999	0,4228	0,5999	1,080
UL	3750	4687,5	400	5087,5	1600	1200		0	1200	4,24	0,3333	0,2434	0,3333	0,600
1	750	937,5	400	1337,5	320	240		0	240	5,57	0,0667	0,0640	0,0667	0,120
2	1500	1875,0	400	2275,0	640	480		0	480	4,80	0,1333	0,1089	0,1333	0,240
3	2250	2812,5	400	3212,5	960	720		0	720	4,46	0,2000	0,1537	0,2000	0,360
4	3000	3750,0	400	4150,0	1280	960		0	960	4,32	0,2667	0,1986	0,2667	0,480
5	3750	4687,5	400	5087,5	1600	1200		0	1200	4,24	0,3333	0,2434	0,3333	0,600
6	4500	5625,0	400	6025,0	1920	1440		0	1440	4,18	0,4000	0,2883	0,4000	0,720
7	5250	6562,5	400	6962,5	2240	1680		0	1680	4,14	0,4667	0,3331	0,4667	0,840
8	6000	7500,0	400	7900,0	2560	1920		0	1920	4,11	0,5333	0,3780	0,5333	0,960
9	6750	8437,5	400	8837,5	2880	2160		0	2160	4,09	0,5999	0,4228	0,5999	1,080
10	7500	9375,0	400	9775,0	3200	2400		0	2400	4,07	0,6667	0,4677	0,6667	1,200
11	8250	10312,5	400	10712,5	3520	2640		0	2640	4,05	0,7333	0,5126	0,7333	1,320
12	9000	11250,0	400	11650,0	3840	2880		0	2880	4,04	0,8000	0,5574	0,8000	1,440
13	9750	12187,5	400	12587,5	4160	3120		0	3120	4,03	0,8667	0,6023	0,8667	1,560
14	10500	13125,0	400	13525,0	4480	3360		0	3360	4,03	0,9333	0,6471	0,9333	1,680
15	11250	14062,5	400	14462,5	4800	3600		0	3600	4,02	1,0000	0,6920	1,0000	1,800

LAST- STUFE	P	M (P)	M (G)	M (P+G)	P (T)	T (P)	T (G)	T (P+G)	$\frac{M(P+G)}{T(P+G)}$	$\frac{T}{T}$ (U)	$\frac{M}{P}$ U(TH)	$\frac{P}{P}$ (U)	$\frac{T}{T}$ U(VS 3)
	(kg)	(mkg)	(mkg)	(mkg)	(kg)	(mkg)	(mkg)	(mkg)					
1	1500	1875	400	2275	300	285	60	345	6,6	0,1067	0,1055	0,0872	0,118
2	3000	3750	400	4150	600	570	60	630	6,6	0,1949	0,1924	0,1744	0,216
3	4500	5625	400	6025	900	855	60	915	6,6	0,2830	0,2793	0,2616	0,213
4	6000	7500	400	7900	1200	1140	60	1200	6,6	0,3712	0,3662	0,3488	0,411
5	7500	9375	400	9775	1500	1425	60	1485	6,6	0,4593	0,4532	0,4360	0,509
6	9000	11250	400	11650	1800	1710	60	1770	6,6	0,5475	0,5401	0,5233	0,606
7	10500	13125	400	13525	2100	1995	60	2055	6,6	0,6356	0,6270	0,6105	0,704
8	11500	14375	400	14775	2300	2185	60	2245	6,6	0,6944	0,6850	0,6686	0,769
9	6000	7500	400	7900	1200	1140	60	1200	6,6	0,3712	0,3662	0,3488	0,411
OL	10000	12500	400	12900	2000	1900	60	1960	6,6	0,6062	0,5981	0,5814	0,671
UL	6000	7500	400	7900	1200	1140,	60	1200	6,6	0,3712	0,3662	0,3488	0,411
1	1500	1875	400	2275	300	285	60	345	6,6	0,1067	0,1055	0,0872	0,118
2	6000	7500	400	7900	1200	1140	60	1200	6,6	0,3712	0,3662	0,3488	0,411
3	10500	13125	400	13525	2100	1995	60	2055	6,6	0,6356	0,6270	0,6105	0,704
4	11500	14375	400	14775	2300	2185	60	2245	6,6	0,6944	0,6850	0,6686	0,769
5	12750	15938	400	16338	2550	2423	60	2483	6,6	0,7680	0,7574	0,7413	0,850
6	14250	17813	400	18213	2850	2708	60	2768	6,6	0,8562	0,8444	0,8285	0,948
7	15750	19688	400	20088	3150	2993	60	3053	6,6	0,9443	0,9313	0,9157	1,046
8	17200	21500	400	21900	3340	3173	60	3233	6,8	1,0000	1,0153	1,0000	1,107

Tabelle 5.

LAST- STUFE	P	M (P)	R (G)	M (P+G)	P (T)	T (P)	T (G)	T (P+G)	$\frac{R(P+G)}{T(P+G)}$	$\frac{T}{T}$ (U)	$\frac{R}{R}$ U(TH)	$\frac{P}{P}$ (U)	$\frac{T}{T}$ U(VS 3)
	(kg)	(mkg)	(mkg)	(mkg)	(kg)	(mkg)	(mkg)	(mkg)					
1	1500	1875	400	2275	640	480	0	480	4.7	0,0952	0,1055	0,0952	0,164
2	3000	3750	400	4150	1280	960	0	960	4.3	0,1905	0,1924	0,1905	0,329
3	3750	4688	400	5088	0	0	0	0	∞	0	0,2359	0,2381	0
4	4500	5625	400	6025	0	0	0	0	∞	0	0,2793	0,2857	0
5	6000	7500	400	7900	0	0	0	0	∞	0	0,3662	0,3810	0
1	1500	1875	400	2275	640	480	0	480	4.7	0,0952	0,1055	0,0952	0,164
2	3000	3750	400	4150	1280	960	0	960	4.3	0,1905	0,1924	0,1905	0,329
3	3750	4688	400	5088	1600	1200	0	1200	4.2	0,2381	0,2359	0,2381	0,411
4	4500	5625	400	6025	1920	1440	0	1440	4.2	0,2857	0,2793	0,2857	0,493
5	6000	7500	400	7900	2560	1920	0	1920	4.1	0,3810	0,3662	0,3810	0,658
6	6750	8438	400	8838	2880	2160	0	2160	4.1	0,4286	0,4097	0,4286	0,740
7	7500	9375	400	9775	3200	2400	0	2400	4.1	0,4762	0,4532	0,4762	0,822
OL	7500	9375	400	9775	3200	2400	0	2400	4.1	0,4762	0,4532	0,4762	0,822
UL	3000	3750	400	4150	1280	960	0	960	4.3	0,1905	0,1924	0,1905	0,329
1	1500	1875	400	2275	640	480	0	480	4.7	0,0952	0,1055	0,0952	0,164
2	3000	3750	400	4150	1280	960	0	960	4.3	0,1905	0,1924	0,1905	0,329
3	4500	5625	400	6025	1920	1440	0	1440	4.2	0,2857	0,2793	0,2857	0,493
4	6000	7500	400	7900	2560	1920	0	1920	4.1	0,3810	0,3662	0,3810	0,658
5	7500	9375	400	9775	3200	2400	0	2400	4.1	0,4762	0,4532	0,4762	0,822
6	9000	11250	400	11650	3840	2880	0	2880	4.0	0,5714	0,5401	0,5714	0,986
7	10500	13125	400	13525	4480	3360	0	3360	4.0	0,6666	0,6270	0,6666	1,151
8	12000	15000	400	15400	5120	3840	0	3840	4.0	0,7619	0,7140	0,7619	1,315
9	12750	15938	400	16338	5440	4080	0	4080	4.0	0,8095	0,7574	0,8095	1,397
10	13500	16875	400	17275	5760	4320	0	4320	4.0	0,8571	0,8009	0,8571	1,480
11	14250	17813	400	18213	6080	4560	0	4560	4.0	0,9048	0,8444	0,9048	1,562
12	15000	18750	400	19150	6400	4800	0	4800	4.0	0,9524	0,8878	0,9524	1,644
13	15750	19688	400	20088	6720	5040	0	5040	4.0	0,0000	0,9313	1,0000	1,726

LAST- STUFE	P	M (P)	M (G)	M (P+G)	P (T)	T (P)	T (G)	T (P+G)	$\frac{M(P+G)}{T(P+G)}$	$\frac{T}{T}$ (U)	$\frac{M}{M}$ U(TH)	$\frac{P}{P}$ (U)	$\frac{T}{T}$ U(VS3)
	(kg)	(mkg)	(mkg)	(mkg)	(kg)	(mkg)	(mkg)	(mkg)					
1	750	938	400	1338	512	384	0	384	3.5	0,0769	0,0620	0,0769	0,132
2	1500	1875	400	2275	1024	768	0	768	3,0	0,1538	0,1055	0,1538	0,263
3	2250	2813	400	3213	1536	1152	0	1152	2,8	0,2308	0,1490	0,2308	0,395
4	3000	3750	400	4150	2048	1536	0	1536	2.7	0,3077	0,1924	0,3077	0,526
5	3750	4688	400	5088	2560	1920	0	1920	2.7	0,3846	0,2359	0,3846	0,658
6	4500	5625	400	6025	3072	2304	0	2304	2.6	0,4615	0,2793	0,4615	0,789
7	5250	6563	400	6963	3584	2688	0	2688	2.6	0,5385	0,3228	0,5385	0,921
8	6000	7500	400	7900	4096	3072	0	3072	2.6	0,6154	0,3662	0,6154	1,052
OL	6000	7500	400	7900	4096	3072	0	3072	2.6	0,6154	0,3662	0,6154	1,052
UL	2250	2813	400	3213	1536	1152	0	1152	2.8	0,2308	0,1490	0,2308	0,395
1	750	938	400	1338	512	384	0	384	3.5	0,0769	0,0620	0,0769	0,132
2	1500	1875	400	2275	1024	768	0	768	3.0	0,1538	0,1055	0,1538	0,263
3	2250	2813	400	3213	1536	1152	0	1152	2.8	0,2308	0,1490	0,2308	0,395
4	3000	3750	400	4150	2048	1536	0	1536	2.7	0,3077	0,1924	0,3077	0,526
5	3750	4688	400	5088	2560	1920	0	1920	2.7	0,3846	0,2359	0,3846	0,658
6	4500	5625	400	6025	3072	2304	0	2304	2.6	0,4615	0,2793	0,4615	0,789
7	5250	6563	400	6963	3584	2688	0	2688	2.6	0,5385	0,3228	0,5385	0,921
8	6000	7500	400	7900	4096	3072	0	3072	2.6	0,6154	0,3662	0,6154	1,052
9	6750	8438	400	8838	4608	3456	0	3456	2.6	0,6923	0,4097	0,6923	1.184
10	7500	9375	400	9775	5120	3840	0	3840	2.5	0,7692	0,4532	0,7692	1.315
11	7875	9844	400	10244	5376	4032	0	4032	2.5	0,8077	0,4749	0,8077	1.381
12	8250	10313	400	10713	5632	4224	0	4224	2.5	0,8462	0,4967	0,8462	1.447
13	8625	10781	400	11181	5888	4416	0	4416	2.5	0,8846	0,5184	0,8846	1.512
14	9000	11250	400	11650	6144	4608	0	4608	2.5	0,9231	0,5401	0,9231	1,578
15	9375	11719	400	12119	6400	4800	0	4800	2.5	0,9615	0,5618	0,9615	1,644
16	9750	12188	400	12588	6656	4992	0	4992	2,5	1,0000	0,5836	1,0000	1,710

Tabelle 7.

LAST- STUFE	P	M (P)	M (G)	M (P+G)	P (T)	T (P)	T (G)	T (P+G)	$\frac{M(P+G)}{T(P+G)}$	$\frac{T}{T}$ (U)	$\frac{M}{M}$ U(TH)	$\frac{P}{P}$ (U)	$\frac{T}{T}$ U(VS4)
	(kg)	(mkg)	(mkg)	(mkg)	(kg)	(mkg)	(mkg)	(mkg)					
1	1500	1875	400	2275	380	361	60	421	5,4	0,0959	0,1024	0,0870	0,120
2	3000	3750	400	4150	760	722	60	782	5,3	0,1781	0,1869	0,1739	0,223
3	4500	5625	400	6025	1140	1083	60	1143	5,3	0,2603	0,2713	0,2609	0,326
4	6000	7500	400	7900	1520	1444	60	1504	5,3	0,3424	0,3557	0,3478	0,428
5	7500	9375	400	9775	1900	1805	60	1865	5,2	0,4244	0,4401	0,4348	0,531
6	9000	11250	400	11650	2280	2166	60	2226	5,2	0,5068	0,5245	0,5217	0,634
7	10000	12500	400	12900	2540	2413	60	2473	5,2	0,5631	0,5808	0,5797	0,705
8	6000	7500	400	7900	1520	1444	60	1504	5,3	0,3424	0,3557	0,3478	0,428
CL	10000	12500	400	12900	2540	2413	60	2473	5,2	0,5631	0,5808	0,5797	0,705
UL	6000	7500	400	7900	1520	1440	60	1504	5,3	0,3424	0,3557	0,3478	0,428
1	1500	1875	400	2275	380	361	60	421	5,4	0,0959	0,1024	0,0870	0,120
2	6000	7500	400	7900	1520	1440	60	1504	5,3	0,3424	0,3557	0,3478	0,428
3	9000	11250	400	11650	2280	2166	60	2226	5,2	0,5068	0,5245	0,5217	0,634
4	10500	13125	400	13525	2660	2527	60	2587	5,2	0,5890	0,6090	0,6087	0,737
5	12000	15000	400	15400	3040	2888	60	2948	5,2	0,6712	0,6934	0,6957	0,840
6	13500	16875	400	17275	3420	3249	60	3309	5,2	0,7534	0,7767	0,7826	0,943
7	15000	18750	400	19150	3800	3610	60	3670	5,2	0,8356	0,8622	0,8696	1,046
8	16500	20625	400	21025	4180	3971	60	4031	5,2	0,9178	0,9466	0,9565	1,148
9	17250	21563	400	21963	4560	4332	60	4392	5,0	1,0000	0,9889	1,0000	1,251

Tabelle 8.

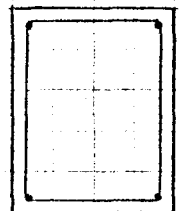
LAST- STUFE	P	M (P)	M (G)	M (P+G)	P (T)	T (P)	T (G)	T (P+G)	$\frac{M(P+G)}{T(P+G)}$	$\frac{T}{T}$ (U)	$\frac{P}{M}$ U(TH)	$\frac{P}{T}$ (U)	$\frac{T}{T}$ U(VS4)
	(kg)	(mkg)	(mkg)	(mkg)	(kg)	(mkg)	(mkg)	(mkg)					
1	750	938	400	1338	512	384	0	384	3,5	0,0696	0,0602	0,0690	0,109
2	1500	1875	400	2275	1024	768	0	768	3,0	0,1391	0,1024	0,1379	0,219
3	2250	2813	400	3213	1536	1152	0	1152	2,8	0,2087	0,1447	0,2069	0,328
4	3000	3750	400	4150	2048	1536	0	1536	2,7	0,2783	0,1869	0,2759	0,438
5	3750	4688	400	5088	2560	1920	0	1920	2,7	0,3478	0,2291	0,3448	0,547
6	4500	5625	400	6025	3072	2304	0	2304	2,6	0,4174	0,2713	0,4138	0,656
7	5250	6563	400	6963	3584	2688	0	2688	2,6	0,4870	0,3135	0,4828	0,766
8	6000	7500	400	7900	4096	3072	0	3072	2,6	0,5565	0,3557	0,5517	0,875
9	6750	8438	400	8838	4608	3456	0	3456	2,6	0,6261	0,3979	0,6207	0,985
OL	6750	8438	400	8838	4608	3456	0	3456	2,6	0,6261	0,3979	0,6207	0,985
UL	3750	4688	400	5088	2560	1920	0	1920	2,7	0,3478	0,2291	0,3448	0,547
1	750	938	400	1338	512	384	0	384	3,5	0,0696	0,0602	0,0690	0,109
2	1500	1875	400	2275	1024	768	0	768	3,0	0,1391	0,1024	0,1379	0,219
3	2250	2813	400	3213	1536	1152	0	1152	2,8	0,2087	0,1447	0,2069	0,328
4	3000	3750	400	4150	2048	1536	0	1536	2,7	0,2783	0,1869	0,2759	0,438
5	3750	4688	400	5088	2560	1920	0	1920	2,7	0,3478	0,2291	0,3448	0,547
6	4500	5625	400	6025	3072	2304	0	2304	2,6	0,4174	0,2713	0,4138	0,656
7	5250	6563	400	6963	3584	2688	0	2688	2,6	0,4870	0,3135	0,4828	0,766
8	6000	7500	400	7900	4096	3072	0	3072	2,6	0,5565	0,3557	0,5517	0,875
9	6750	8438	400	8838	4608	3456	0	3456	2,6	0,6261	0,3979	0,6207	0,985
10	7500	9375	400	9775	5120	3840	0	3840	2,5	0,6957	0,4401	0,6897	1,094
11	7875	9844	400	10244	5376	4032	0	4032	2,5	0,7304	0,4613	0,7241	1,149
12	8250	10313	400	10713	5632	4224	0	4224	2,5	0,7652	0,4824	0,7586	1,203
13	8625	10781	400	11181	5888	4416	0	4416	2,5	0,8000	0,5034	0,7921	1,258
14	9000	11250	400	11650	6144	4608	0	4608	2,5	0,8348	0,5246	0,8276	1,313
15	9375	11719	400	12119	6400	4800	0	4800	2,5	0,8696	0,5457	0,8621	1,368
16	9750	12188	400	12588	6656	4992	0	4992	2,5	0,9044	0,5668	0,8966	1,422
17	10125	12656	400	13056	6912	5184	0	5184	2,5	0,9391	0,5878	0,9310	1,477
18	10500	13125	400	13525	7168	5376	0	5376	2,5	0,9739	0,6090	0,9655	1,532
19	10875	13594	400	13994	7360	5520	0	5520	2,5	1,0000	0,6301	1,0000	1,573

Tabelle 10 Beanspruchung der Versuchsbalken QT 2.5 und QT 2.6

Last- stufen	Versuchsbalken QT 2.5			Versuchsbalken QT 2.6		
	V _T (kp)	P (kp)	T (kpm)	V _T (kp)	P (kp)	T (kpm)
1	490	1500	150	490	1080	150
2	650	3000	270	650	2160	270
3	850	4500	420	850	3240	420
4	1050	6000	570	1050	4320	570
5	1250	7500	720	1250	5400	720
6	1410	9000	840	1410	6480	840
7	1610	10500	990	1610	7560	990
8	1790	12000	1125	1790	8640	1125
9	1970	13500	1260	1970	9720	1260
10	2170	15000	1410	2170	10800	1410
11	2350	16500	1545	2350	11880	1545
12	2530	18000	1680	2530	12960	1680
13	2730	19500	1830	2730	14040	1830
14	2910	21000	1965	2910	15120	1965
15	3110	22500	2115	3110	15120	2115
16	3290	24000	2250	3290	15120	2250
17	3470	25500	2385	3490	15120	2385
18				3690	15120	2550
19				3890	15120	2700
20				4090	15120	2850
21				4290	15120	3000
22				4490	15120	3150

B i l d e r

Bild 17. Torsion-Biegemoment-Interaktion symmetrisch bewehrten Querschnittes nach verschiedenen Theorien.



Querschnittsangaben wie bei Chinenkov [15] und Lyalin [16]

Symbole:

- △—△— Lessig
- Lampert-Thürlimann
- x—x— Collins
- +—+— McMullen-Warwaruk

■ Versuchsweite

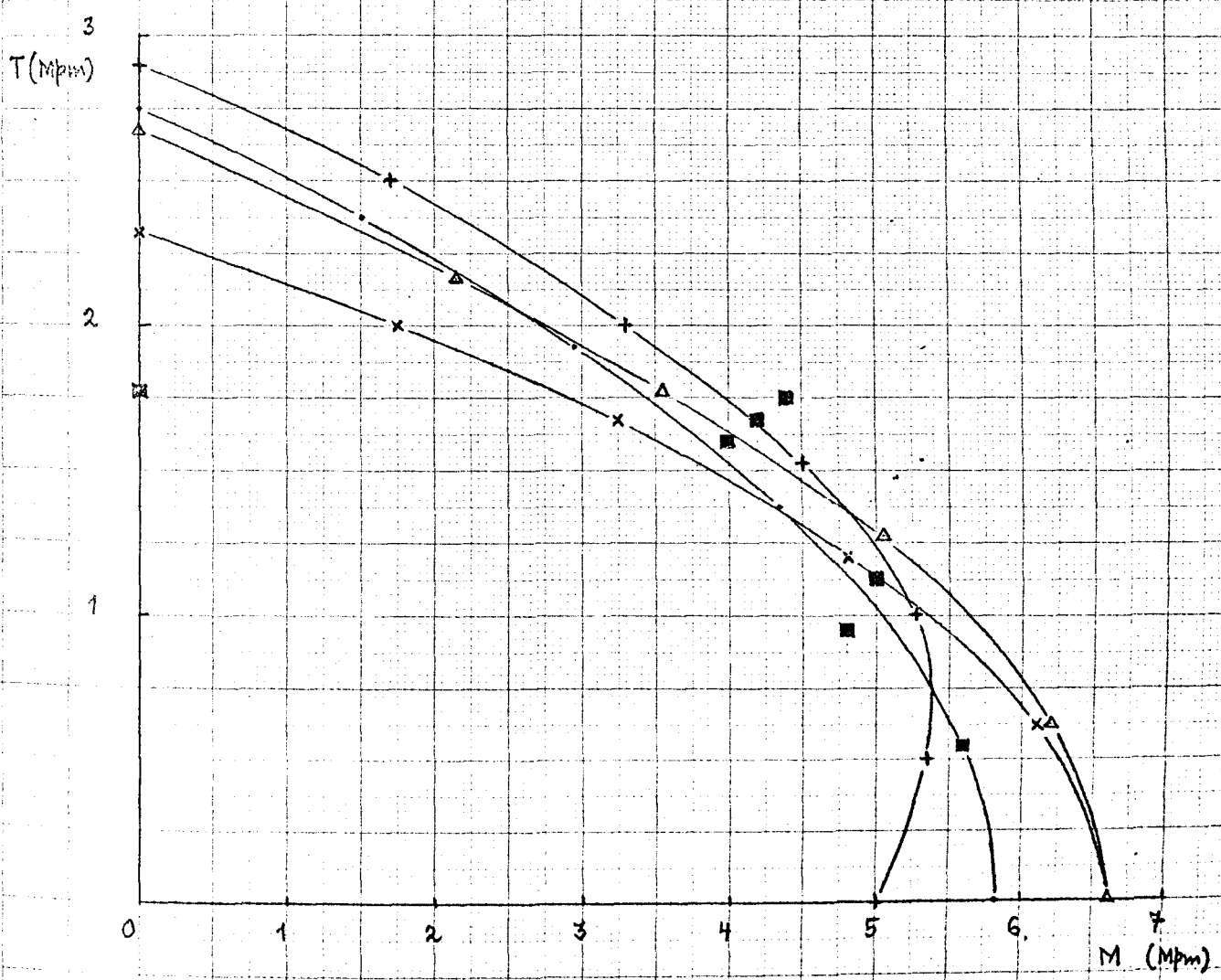
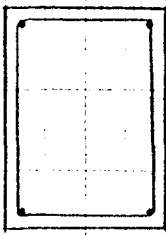


BILD 18.

Torsion-Biegemoment-Interaktion unsymmetrisch bewehrten Querschnittes nach verschiedenen Theorien



Querschnittsangaben wie bei Goode und Helmig Serie IV [54 S. 359]

Symbole:

- △—△— Lessig
- Lampert-Thüchtemann
- x—x— Collins
- +—+— Mc Mullen-Waxwark

■ Versuchswerte

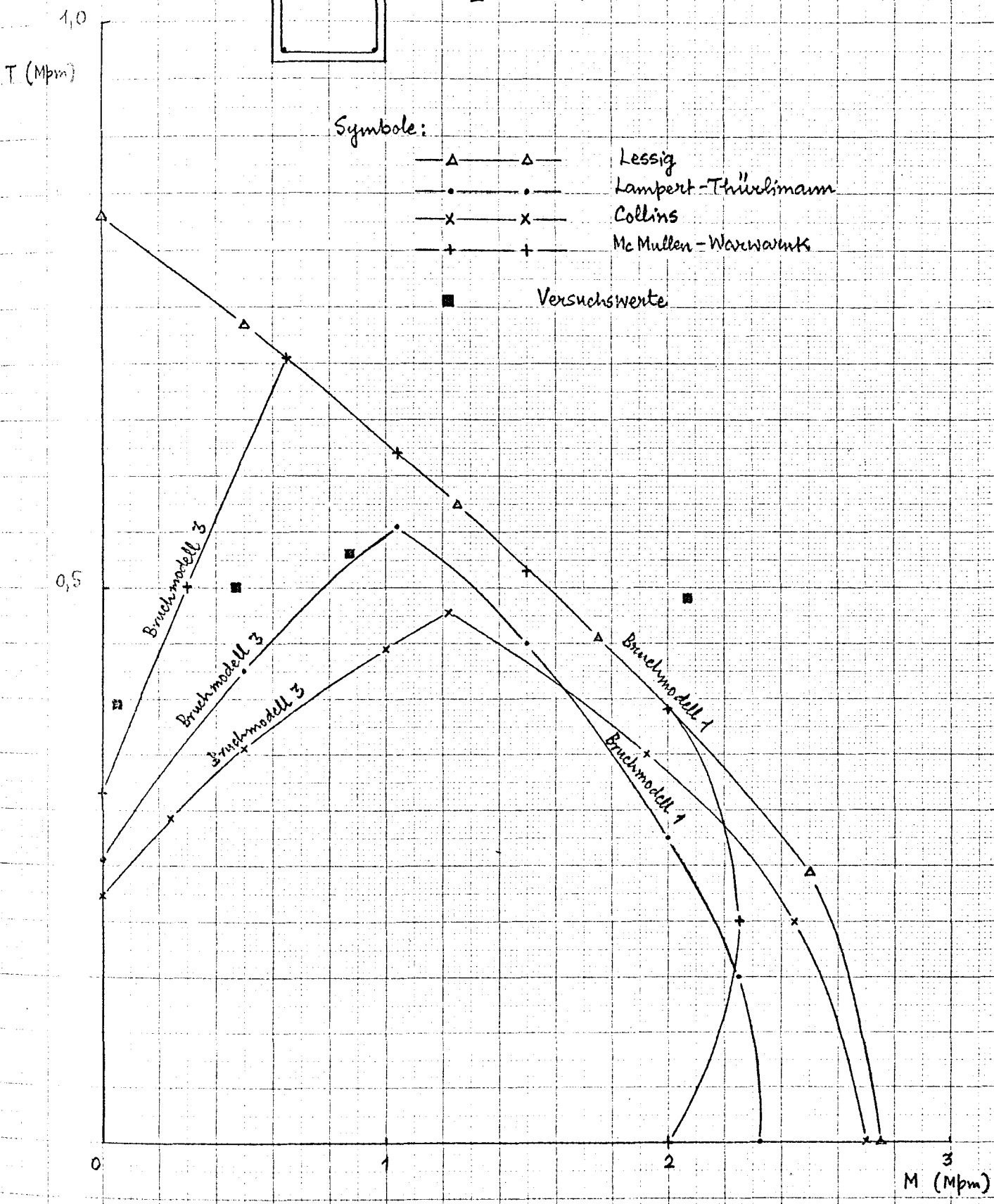
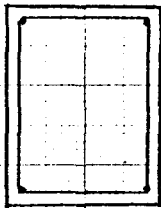


Bild 19. Torsion-Querkraft-Interaktion asymmetrisch bewehrten Querschnittes nach verschiedenen Theorien.



Querschnittsangaben wie bei Lyalin [16]

Symbole:

- | | | |
|-----|----|------------------|
| —Δ— | Δ— | Lessig |
| —x— | x— | Collins |
| —+— | +— | McMullen-Warwark |
| ■ | | Versuchswerte |

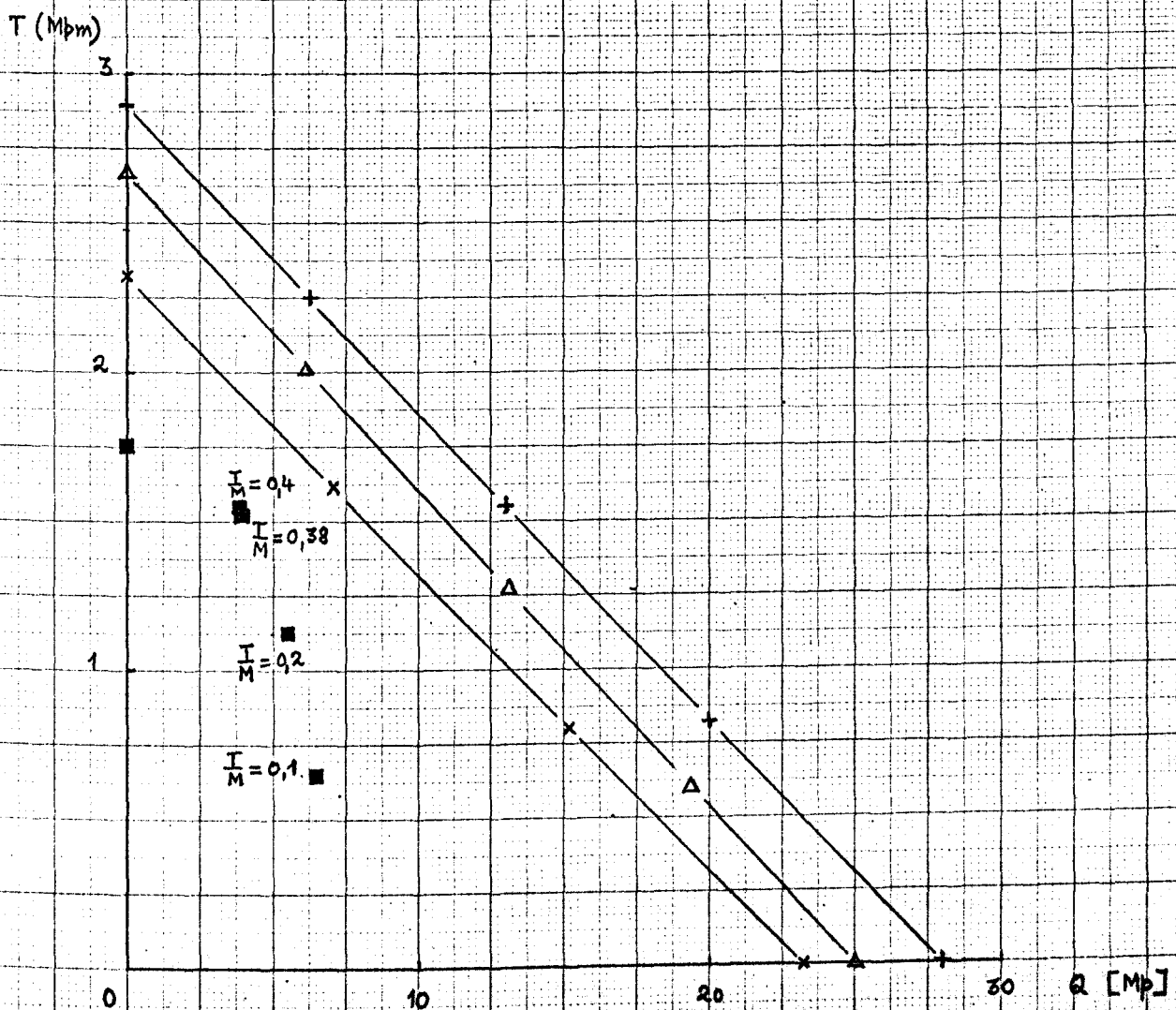


BILD 20. Einfluss der Betonfestigkeit

■ Versuchswerte (Ojha)

$b = 15 \text{ cm}$

$d = 30 \text{ cm}$

$F_{tu} = 2 \text{ } \varnothing 18$

$\beta_{cu} = 2600 \text{ kp/cm}^2$

$F_{to} = 2 \text{ } \varnothing 16$

$\beta_{so} = 2600 \text{ kp/cm}^2$

$E_s = 206 \cdot 10^6 \text{ kp/cm}^2$

$s = 10 \text{ cm}$

$F_{ss} = \varnothing 6 \text{ mm} = 0,28 \text{ cm}^2$

$\beta_{ss} = 2600 \text{ kp/cm}^2$

$T/M = 0,243$

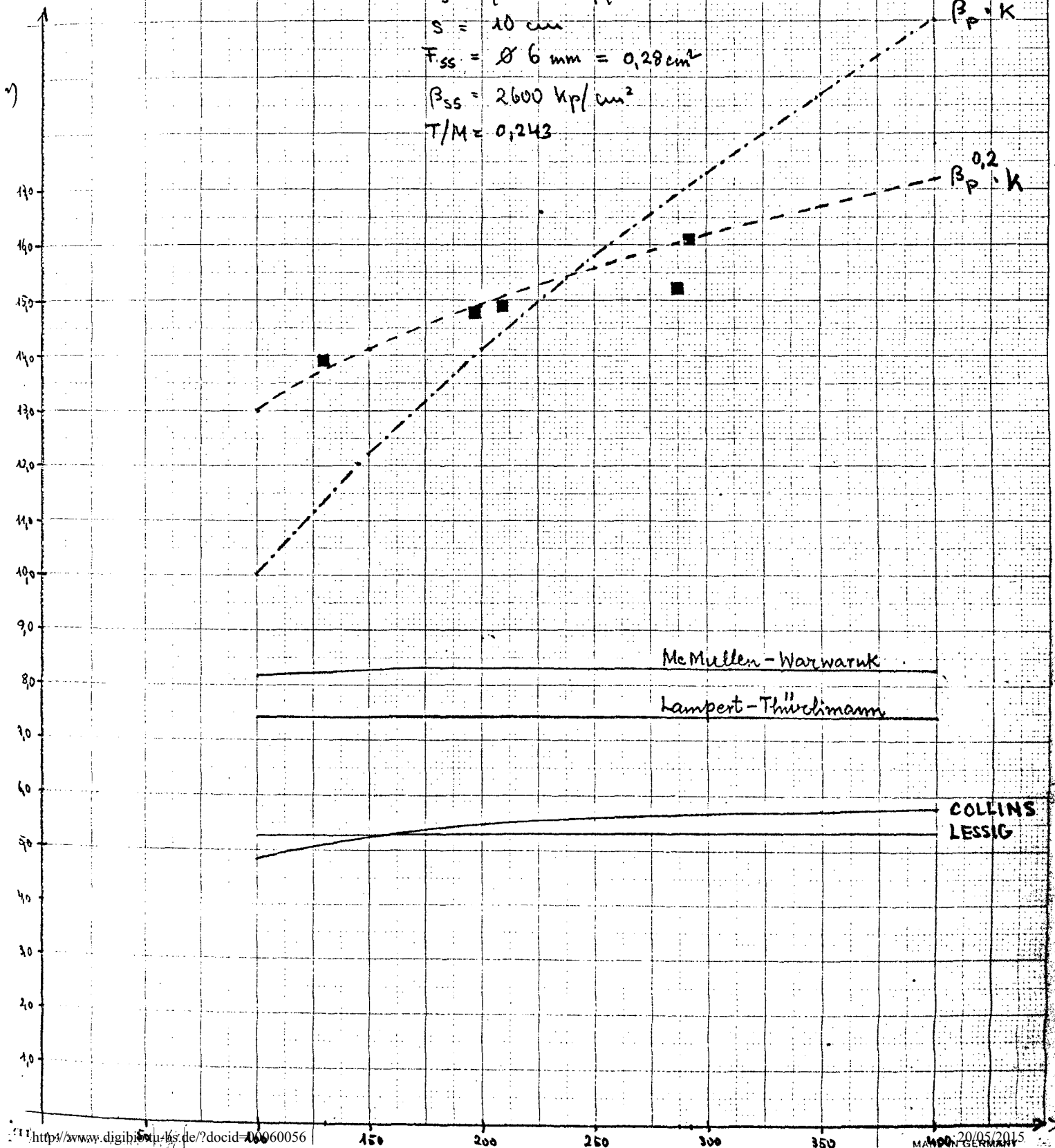


BILD 21. Einfluß der Längsbewehrung

■ · Versuchswerte Hsu (reine Torsion)

$$b = 25,4 \text{ cm}$$

$$d = 38,1 \text{ cm}$$

$$\beta_{es} = 3500 \text{ kp/cm}^2$$

$$E_s = 2,06 \cdot 10^6 \text{ kp/cm}^2$$

$$\beta_p = 288 \text{ kp/cm}^2$$

$$s = 15,24 \text{ cm}$$

$$F_{ss} = \varnothing 9,54 \text{ mm} = 0,714 \text{ cm}^2 \quad (M_{br} = 0,54\%)$$

$$\frac{T}{M} = 0,5$$

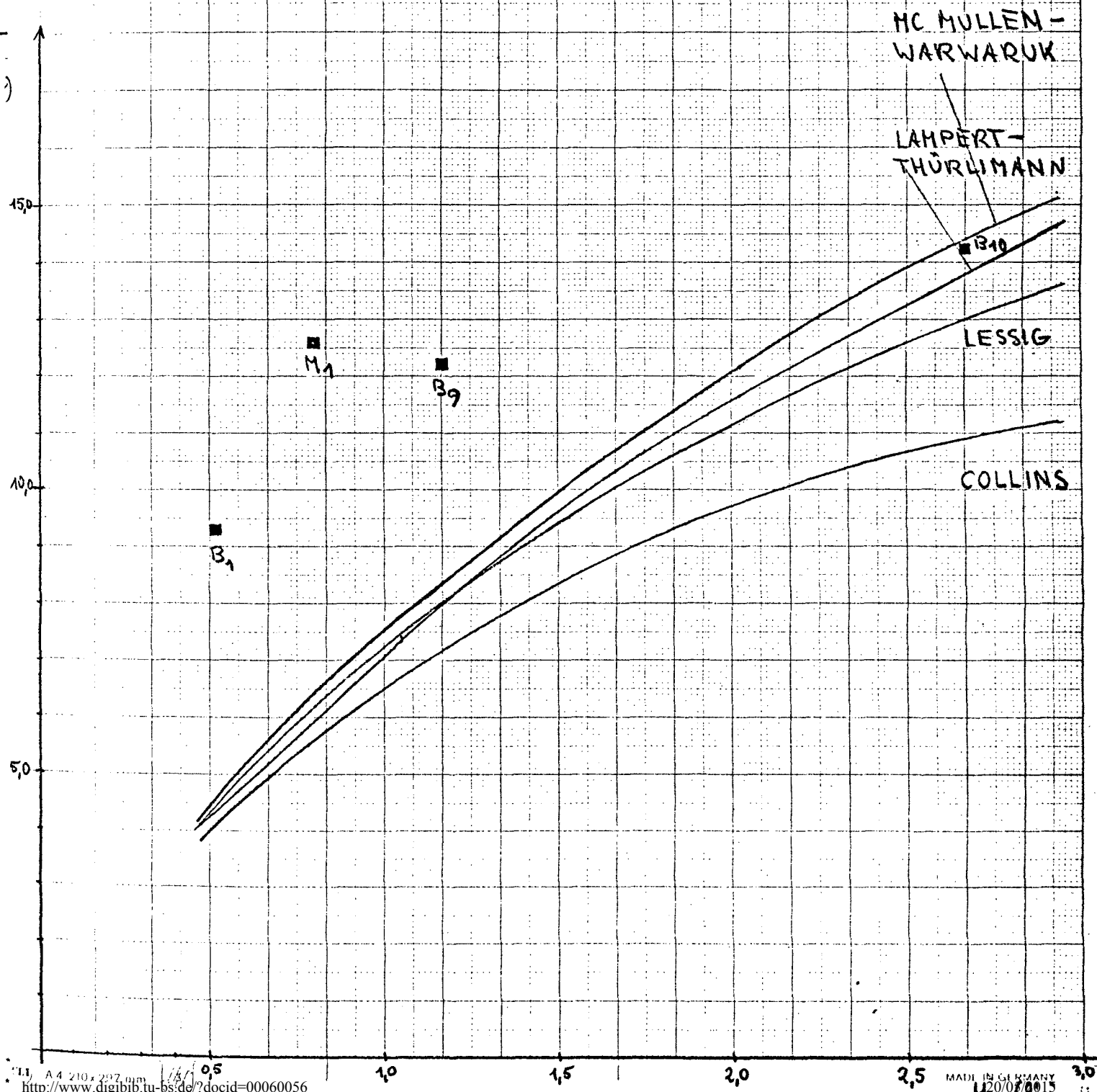


BILD 22. EINFLUSS DER BÜGELBEWEHRUNG.

$$b = 25,4 \text{ cm}$$

$$d = 38,1 \text{ cm}$$

$$\beta_{es} = 3320 \text{ kp/cm}^2$$

$$E_s = 2,06 \cdot 10^6 \text{ kp/cm}^2$$

$$\beta_p = 297 \text{ kp/cm}^2$$

$$\mu_L = 1,17\%$$

$$\frac{I}{M} = 0,5$$

■ Versuchswerte H_{su} (reine Torsion)

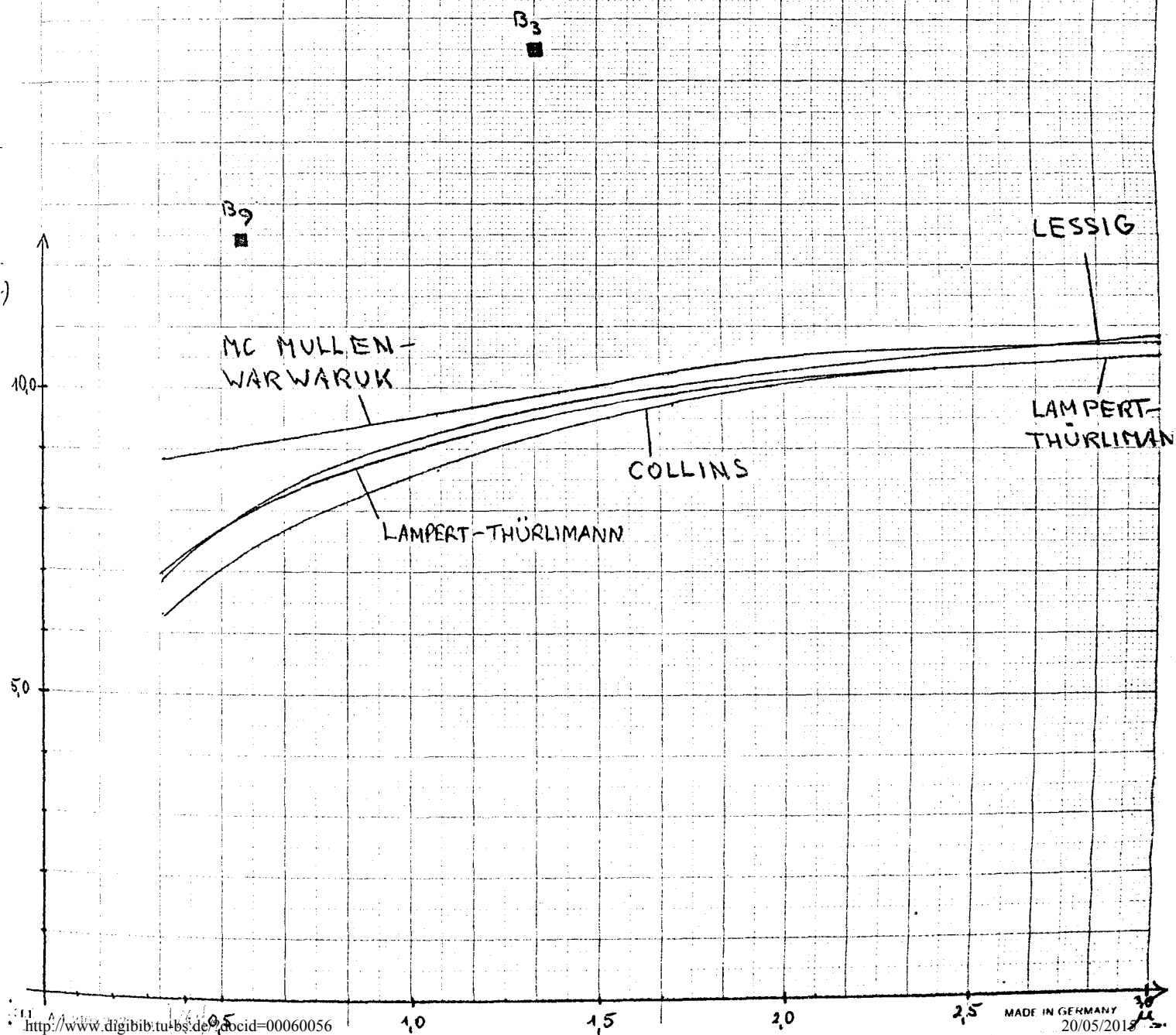


BILD 23. EINFLUSS DER GESAMTBEWEHRUNG

■ Versuchswerte H_{su} (reine Torsion)

$$b = 25,4 \text{ cm}$$

$$d = 38,1 \text{ "}$$

$$\beta_{es} = 3310 \text{ kp/cm}^2$$

$$E_s = 206 \cdot 10^6 \text{ kp/cm}^2$$

$$\beta_p = 294 \text{ kp/cm}^2$$

$$\frac{I}{M} = 0,5$$

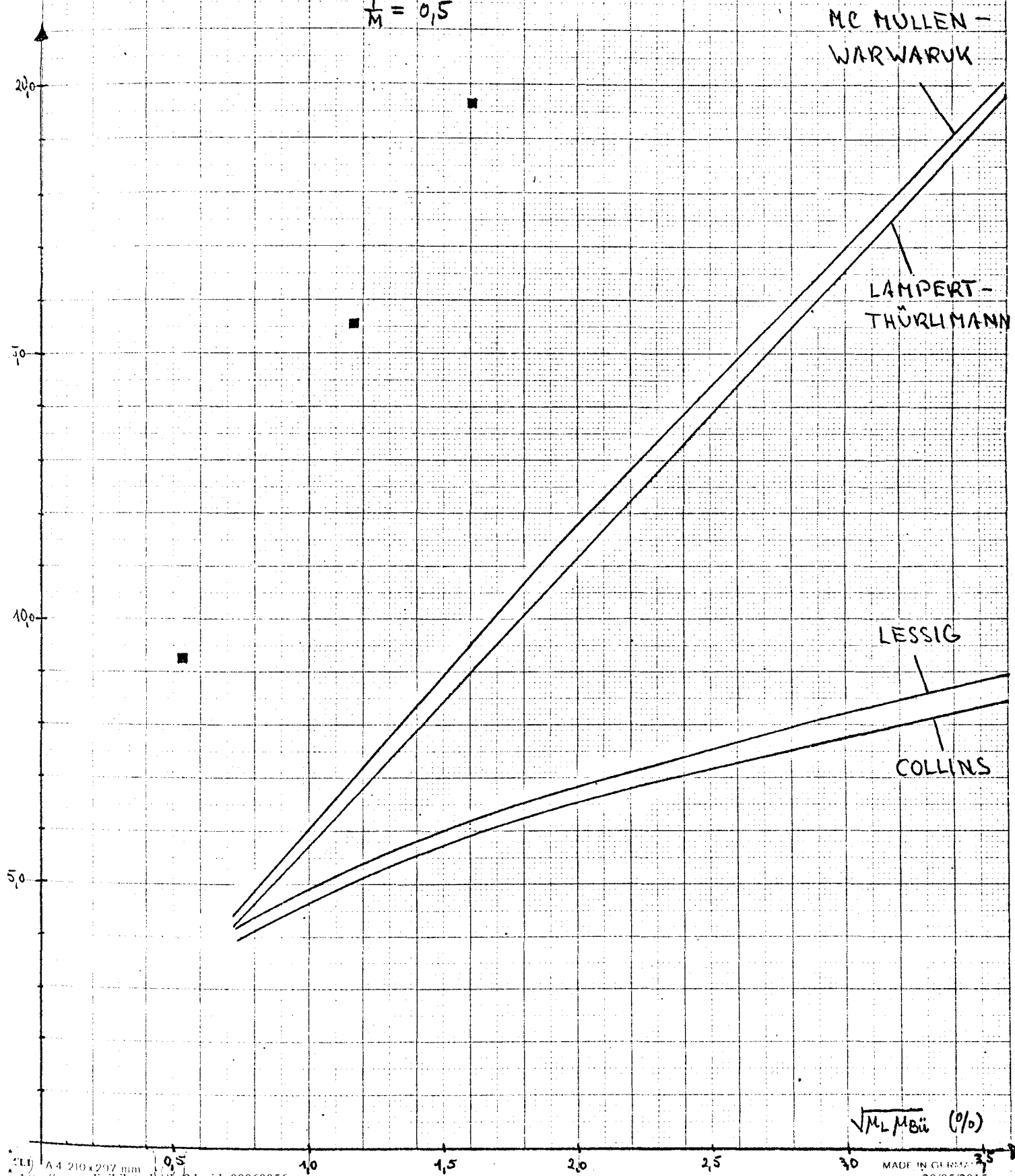


BILD 24. EINFLUSS DES T/M VERHÄLTNISES (Berechnungsmodelle 1 und 3)

■ Versuchsergebnisse McMullen-Warwaruk

$$b = 15,65 \text{ cm}$$

$$d = 30,80 \text{ "}$$

$$P_{es} = 3300 \text{ kp/cm}^2$$

$$E_s = 206 \cdot 10^6 \text{ kp/cm}^2$$

$$\beta_p = 350 \text{ kp/cm}^2$$

$$s = 8,25 \text{ cm}$$

$$P_{ss} = 3860 \text{ kp/cm}^2$$

$$F_{en} = 2 \text{ } \varnothing 19,05 \text{ mm}$$

$$F_{eo} = 2 \text{ } \varnothing 9,52 \text{ mm}$$

$$F_{ss} = \varnothing 9,52 \text{ mm}$$

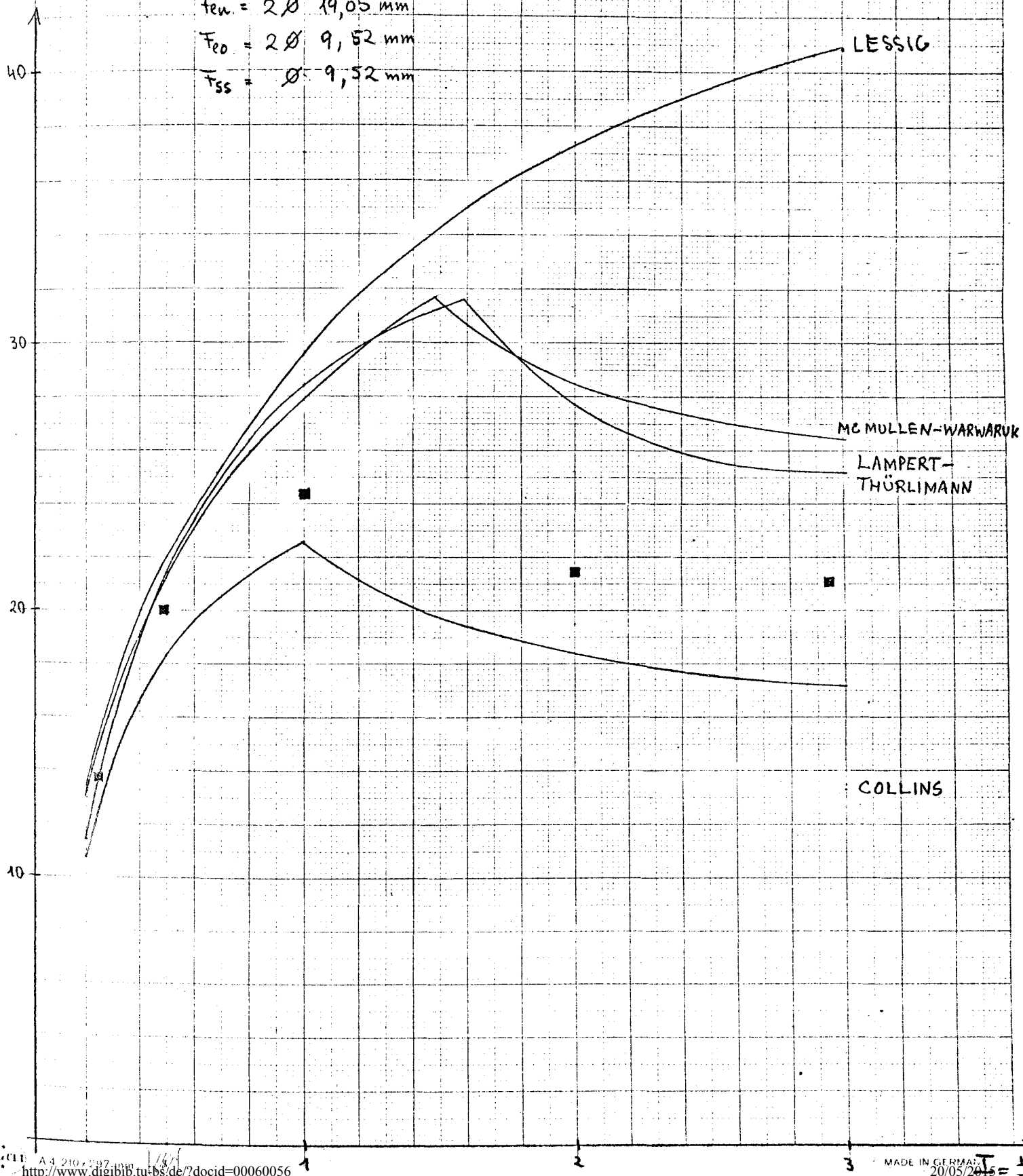


BILD 26, EINFLUSS DES $\frac{I}{Q \cdot b}$ - VERHÄLTNISSSES (Bruchmodell 2)

$$b = 20 \text{ cm}$$

$$d = 30 \text{ cm}$$

$$\beta_{es} = 4390 \text{ kp/cm}^2$$

$$E_s = 206 \cdot 10^6 \text{ kp/cm}^2$$

$$\beta_p = 263 \text{ kp/cm}^2$$

$$s = 10 \text{ cm}$$

$$\beta_{ss} = 2700 \text{ kp/cm}^2$$

$$\frac{I}{Qb} = 0; 0,5; 1,0; 1,5; 2,5$$

$$F_{e0} = F_{eu} = 2 \varnothing 18 \text{ mm} + 1 \varnothing 22 \text{ mm}$$

$$\text{Bügel } \varnothing 9 \text{ mm}$$

■ Versuchsergebnisse Khus [50]

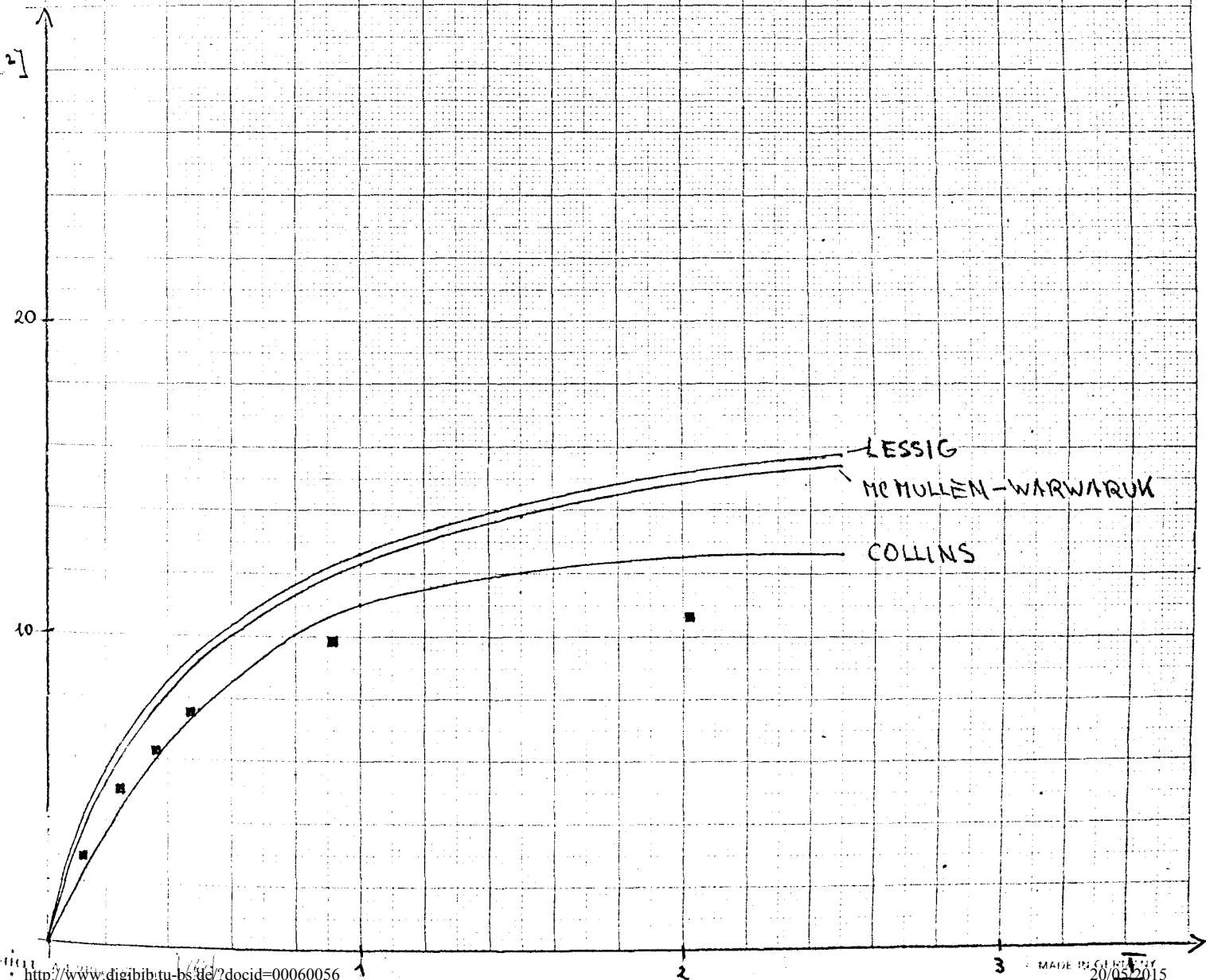
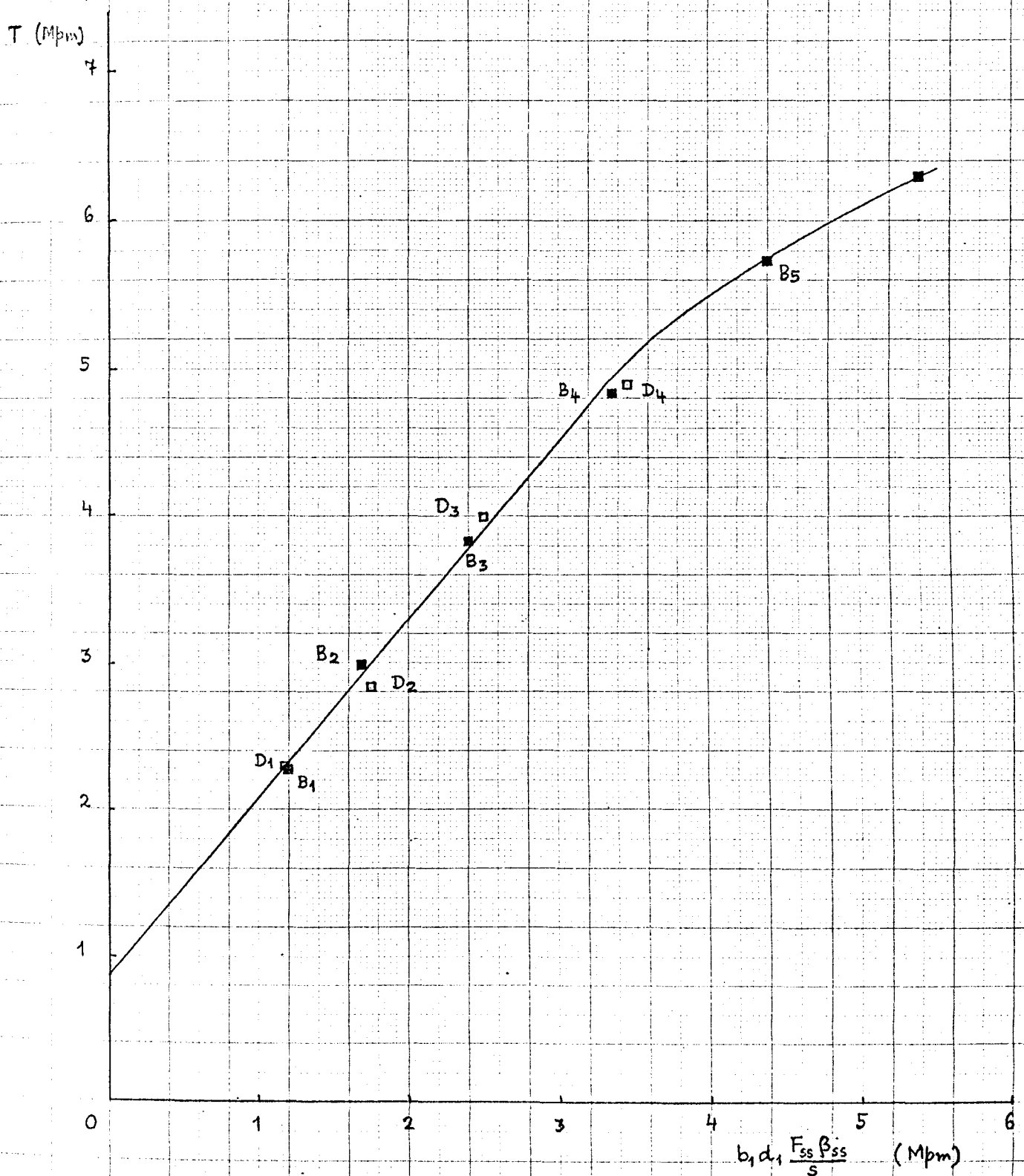


BILD 24. VERGLEICH DER VOLL- UND HOHLQUERSCHNITTE

NACH HSU [54, s. 281, Bild 10-8]

Symbole:

- Rechteckvollquerschnitt bei reiner Torsion
- Rechteckhohlkastenquerschnitt bei reiner Torsion



$\frac{G.K_{II}}{G.K_I} [\%]$

■ Versuchsergebnisse Hsu [54, S. 261 bis 306]

Querschnittsangaben wie bei Hsu Serie B und I [54, S. 264]

40

30

20

10

0

100

200

300

400

500

$\beta_p [Kp/cm^2]$

Bay

Lampert-Thürlimann

Collins

Karlssohn

Rahlwes

■ I₃

■ B₃

■ I₃

BILD 30. Einfluss der Betonfestigkeit auf die Torsionssteifigkeit bei reiner Torsion.

■ Versuchsergebnisse Hsu [54, s. 261 bis 306]

Querschnittsangaben wie bei Hsu Serie B und M [54, s. 264]

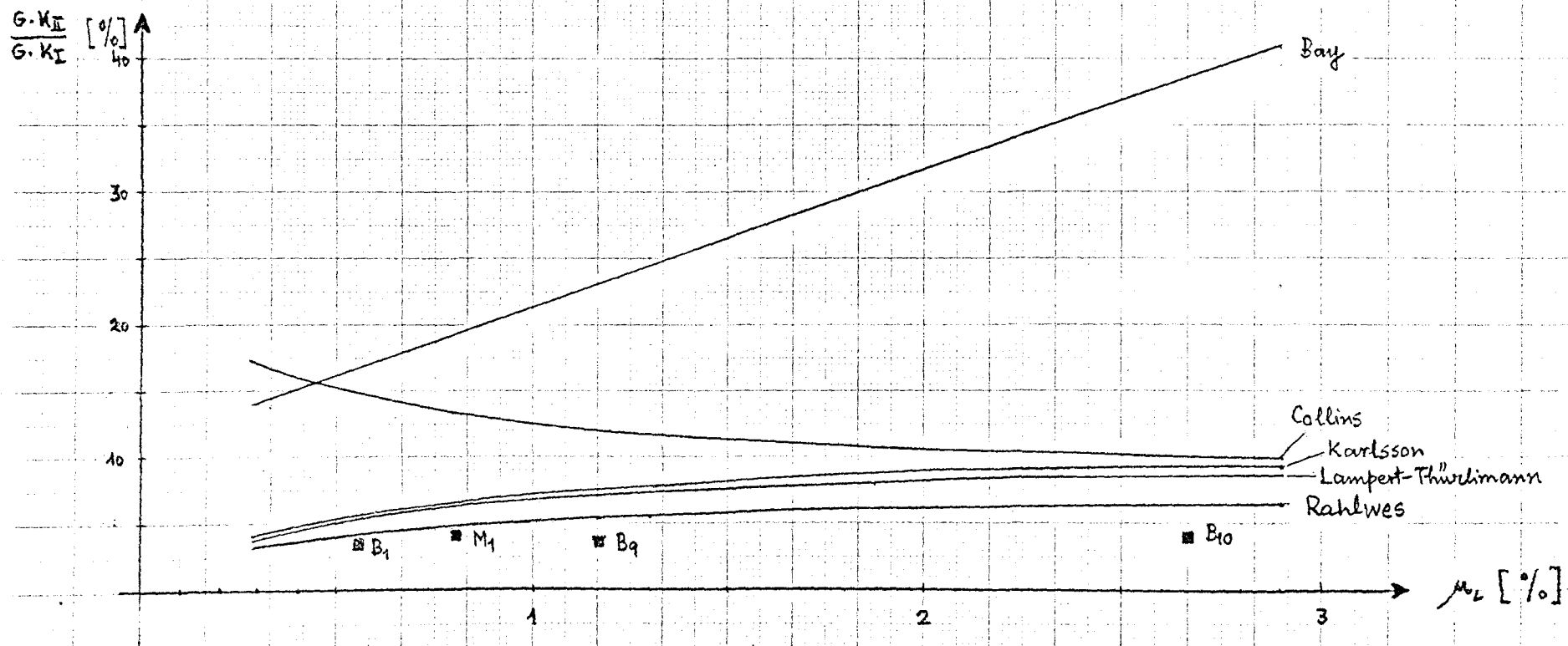


BILD 31. Einfluss der Längsbewehrung auf die Torsionssteifigkeit bei reiner Torsion.

Versuchsergebnisse Hsu [54, S. 261 bis 266]

Querschnittsangaben wie bei Hsu Serie B und M [54, S. 264]

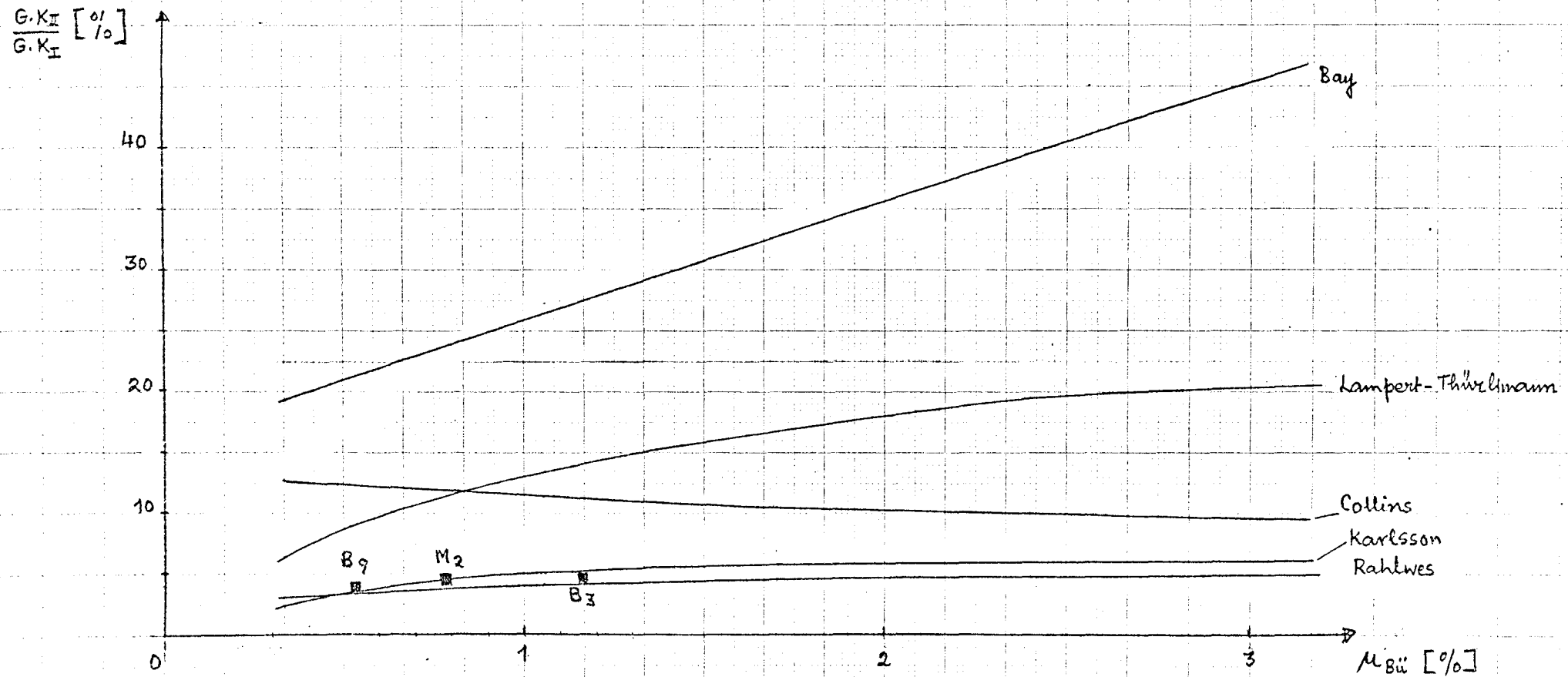


BILD 32. Einfluß der Bügelbewehrung auf die Torsionssteifigkeit bei reiner Torsion

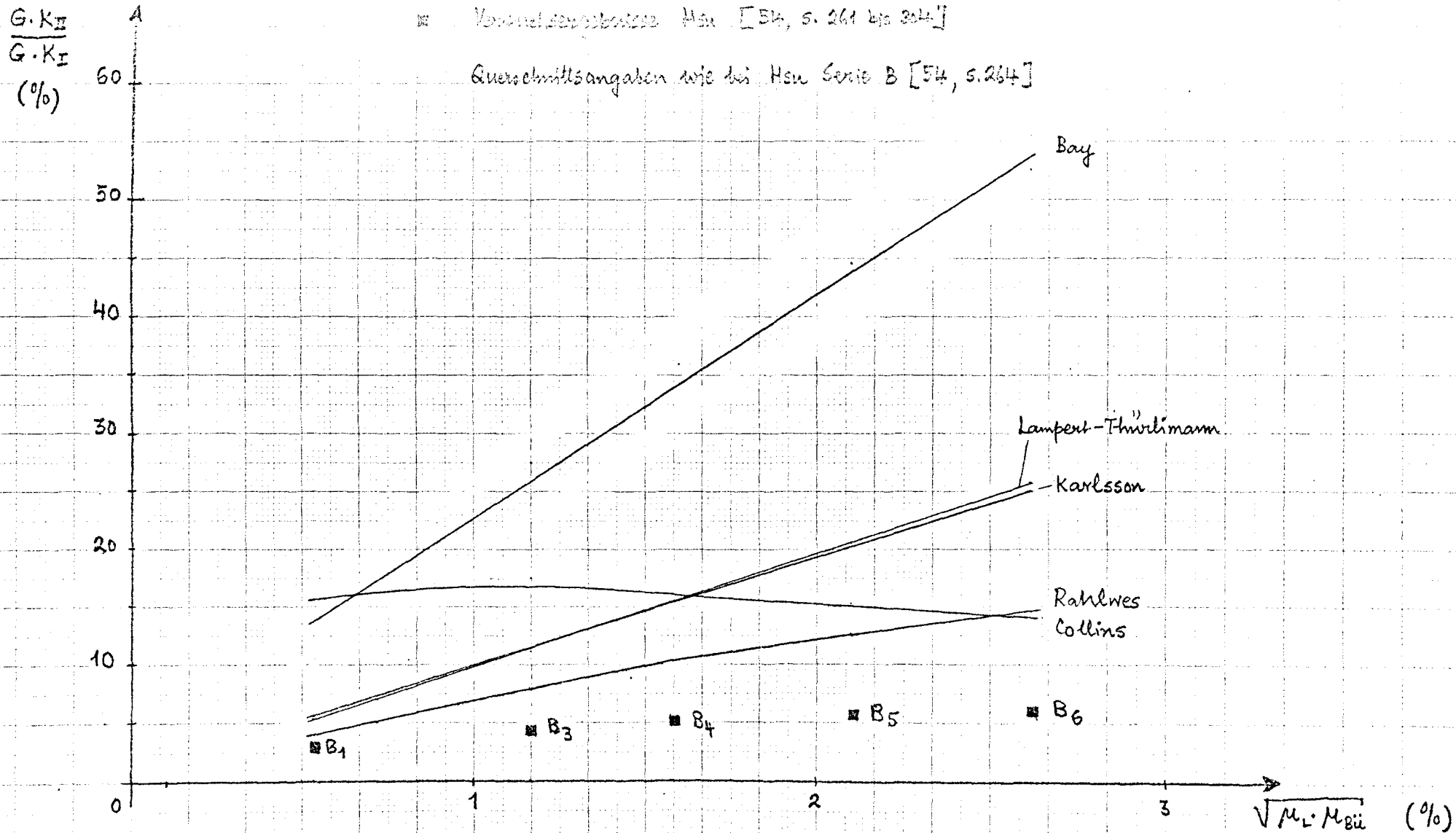
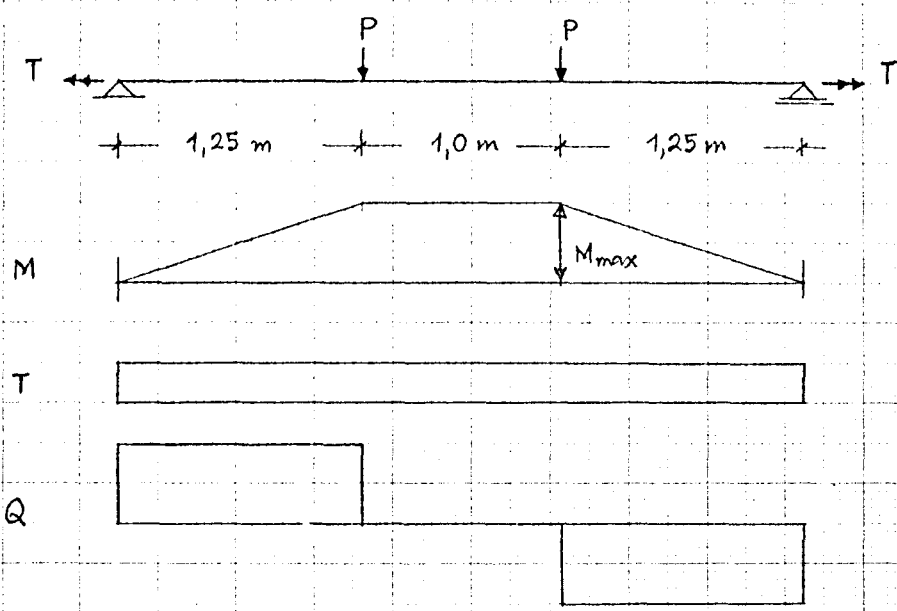
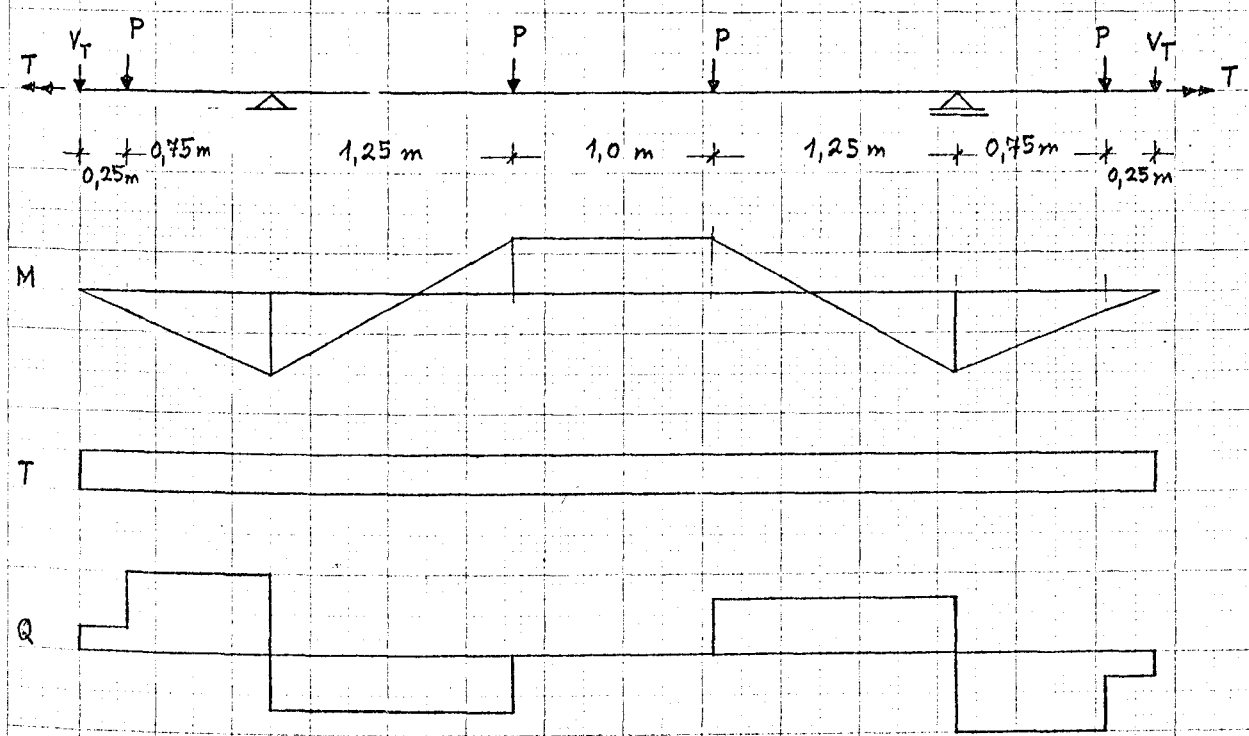


BILD 33. Einfluss der Gesamtbewehrung auf die Torsionssteifigkeit bei reiner Torsion

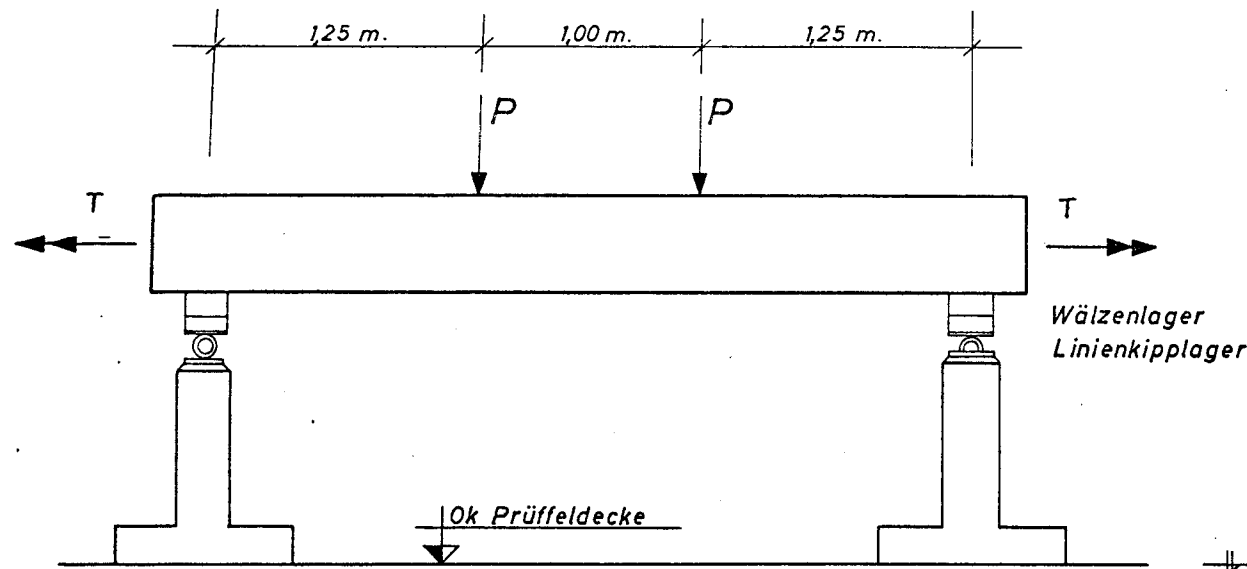


(a) Versuchsbalken QT 2.1 bis 2.4, QT 3.1 bis 3.3, QT 4.1 und QT 4.2

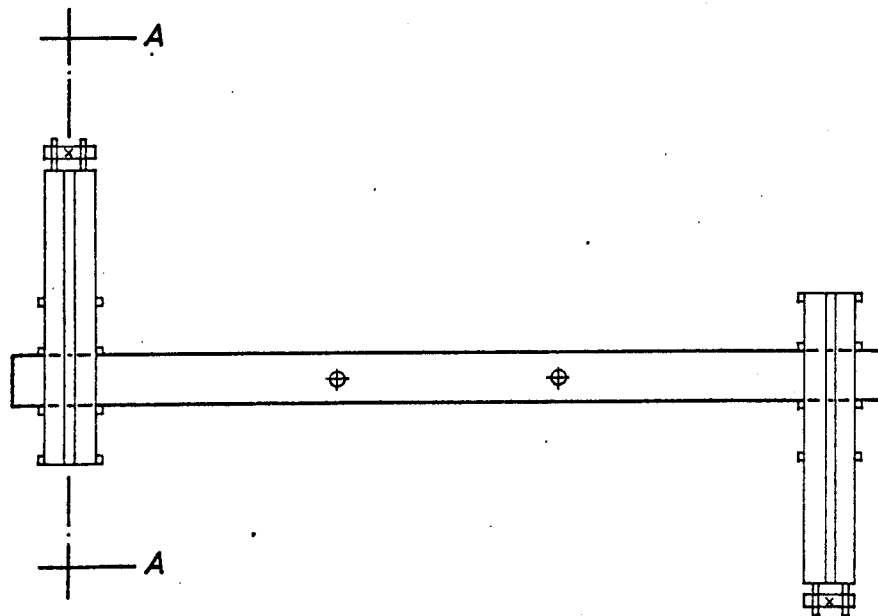


(b) Versuchsbalken QT 2.5 und QT 2.6

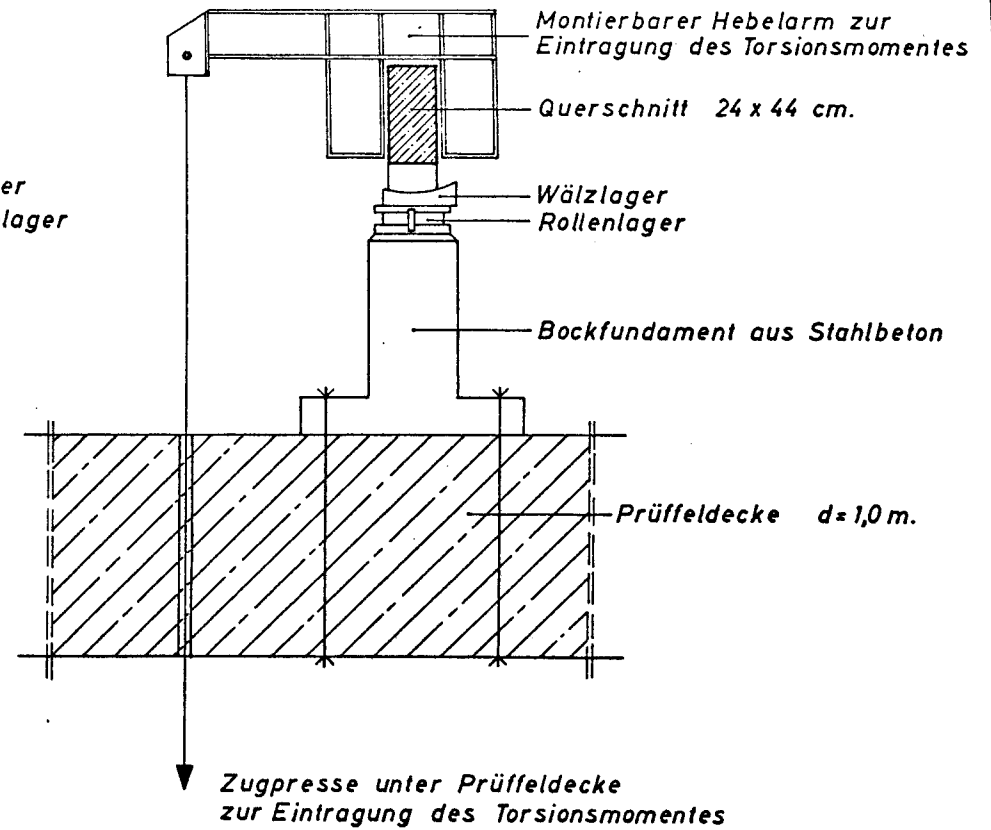
Bild 36. DAS STATISCHE SYSTEM DER ZWEI VERSUCHSREIHEN



Seitenansicht



Draufsicht



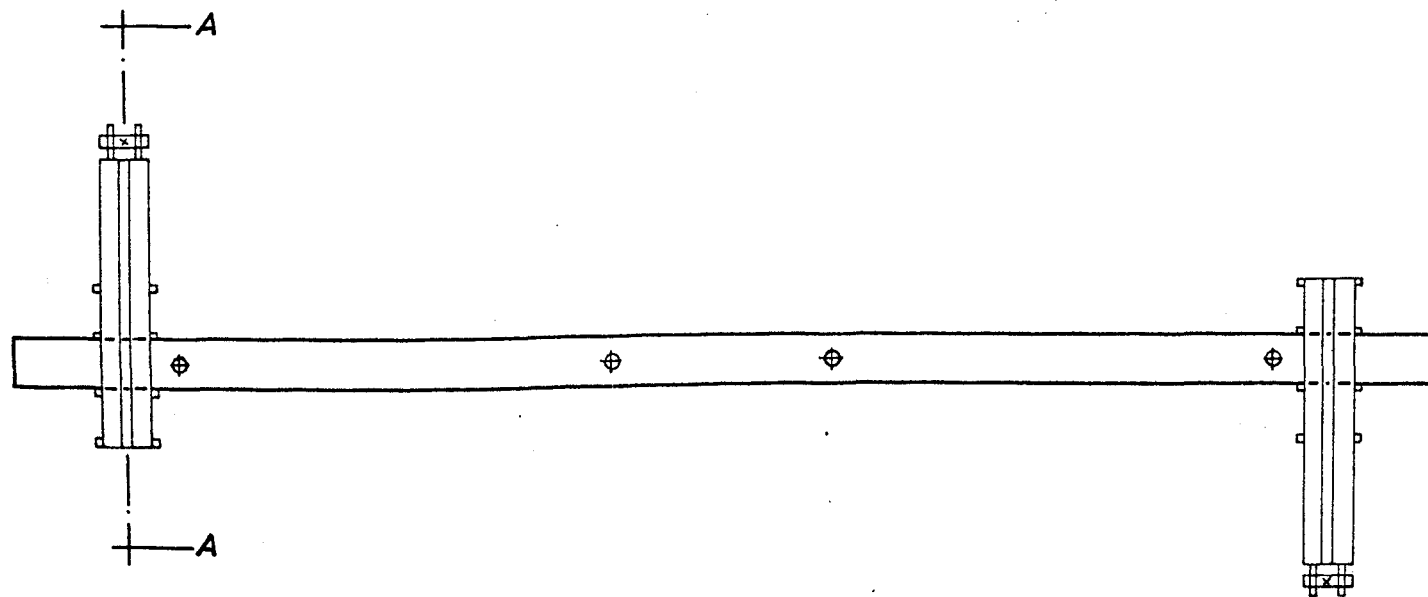
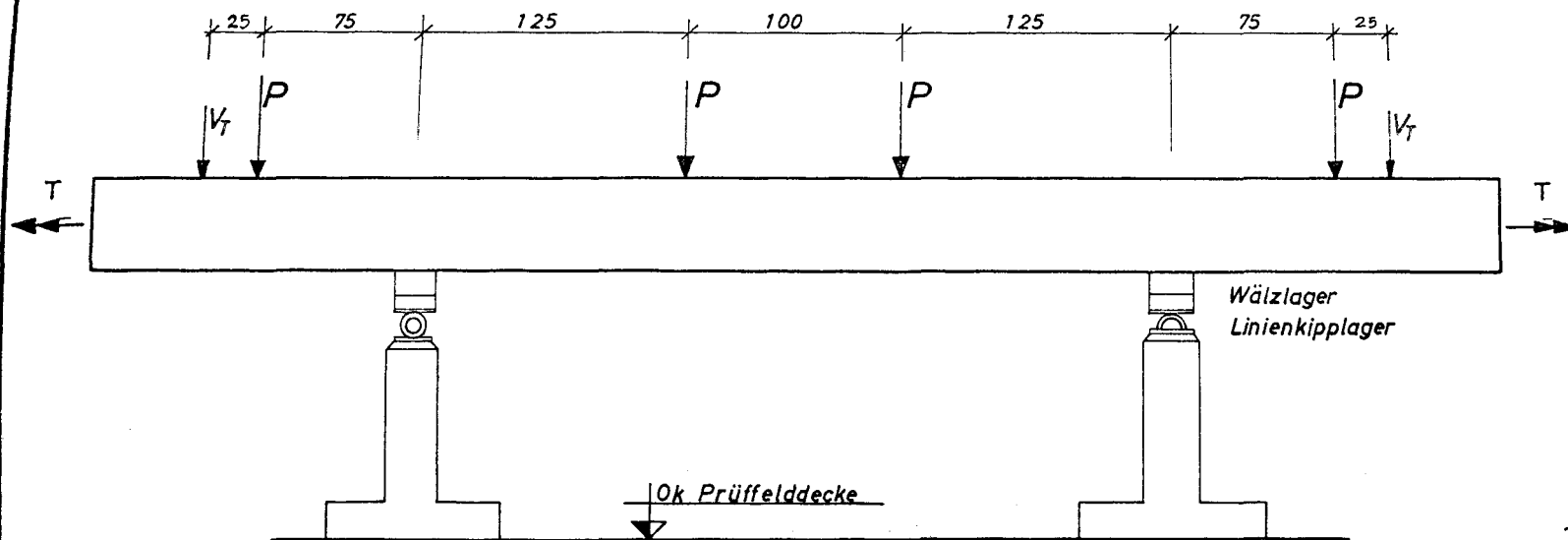
Schnitt A - A

Versuchsaufbau (1. Reihe) M. 1:25

Institut für Baustoffkunde und Stahlbetonbau
Technische Hochschule Braunschweig
Amtliche Materialprüfanstalt für das Bauwesen

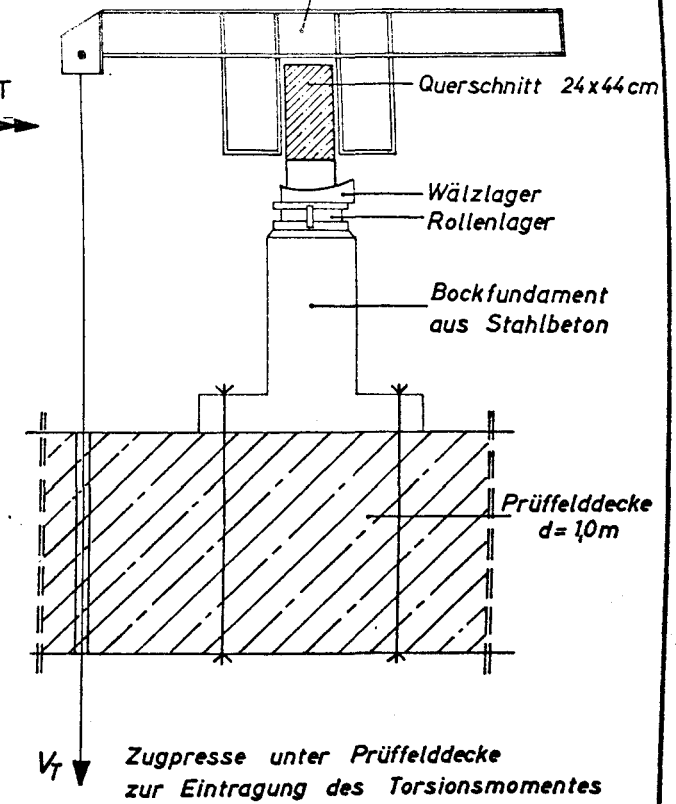
Bild 37.

Seitenansicht



Draufsicht

Montierbarer Hebelarm zur Eintragung des Torsionsmomentes

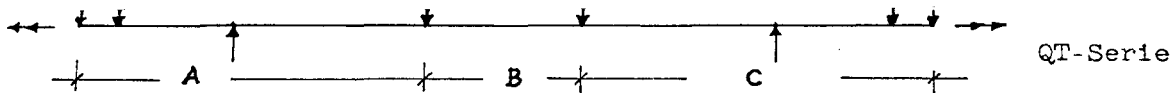


Schnitt A-A

Versuchsaufbau (2. Reihe) M 1:25

Institut für Baustoffkunde und Stahlbetonbau
Technische Hochschule Braunschweig
Amtliche Materialprüfanstalt für das Bauwesen

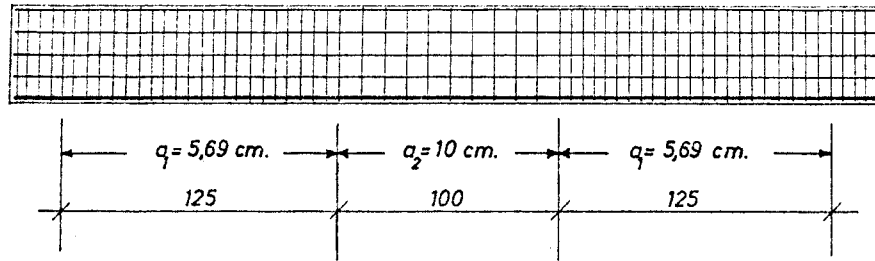
Bild 38



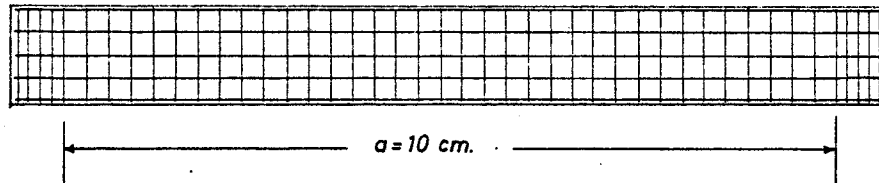
VS-Serie						QT-Serie						Bemerkungen
Balken	Querschnitt 24 x 44 cm	Längseisen	Bügel			Balken	Querschnitt 24 x 44 cm	Längseisen im Feld	Bügel			
			Be- reich	Durch- messer	Ab- stand (cm)				Be- reich	Durch- messer	Ab- stand (cm)	
VS-2		3 IIIb Ø6 3 IIIb Ø6	A } B } C }	IIIbØ6	10	QT 2.1 - 2.3		3 IIIb Ø 6 4 IIIb Ø20	A B C	IIIbØ6 IIIbØ6 IIIbØ6	5,69 10 5,69	Längsbewehrung an den Balken- seiten ist gleich groß in beiden Se- rien.
VS-3		4 IIIb Ø6 4 IIIb Ø6	A } B } C }	IIIbØ6	6,7	QT 3.1 - 3.3		4 IIIb Ø 6 4 IIIb Ø20	A B C	IIIbØ6 IIIbØ6 IIIbØ6	4,46 6,7 4,46	
VS-4		5 IIIb Ø6 5 IIIb Ø6	A } B } C }	IIIbØ6	5	QT 4.1 u. 4.2		5 IIIb Ø 6 4 IIIb Ø20	A B C	IIIbØ6 IIIbØ6 IIIbØ6	3,68 5 3,68	
VS-2.4		3 IIIb Ø6 3 IIIb Ø6	A } B } C }	IIIbØ6	10	QT 2.4 QT 2.5 u. 2.6	 	5 IIIb Ø 6 4 IIIb Ø20 2 IIIb Ø20 +2IIIb Ø12 2 IIIb Ø20 +2IIIb Ø16 +2IIIb Ø12	A } B } C } A B C D	IIIbØ6 IIIbØ6 IIIbØ6 IIIbØ6 IIIbØ6 IIIbØ6 IIIbØ6	10 10 5 5,56 5	

Note: 1 cm klare Betonüberdeckung über den Bügelstab
(auf der unteren Seite 1.5 cm)

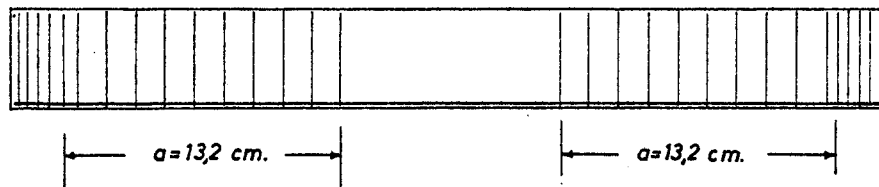
QT 2



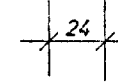
VS 2



QT 2B



4 III b Ø 20 mm. $\hat{=} Fe = 12,56 \text{ cm}^2$.



3 III b Ø 6 mm. $\hat{=} Fe = 0,85 \text{ cm}^2$.



$Fe = 12,56 - 0,85 = 11,71 \text{ cm}^2$.

Bügel
Längseisen } III b Ø 6 mm.

Bemerkung:

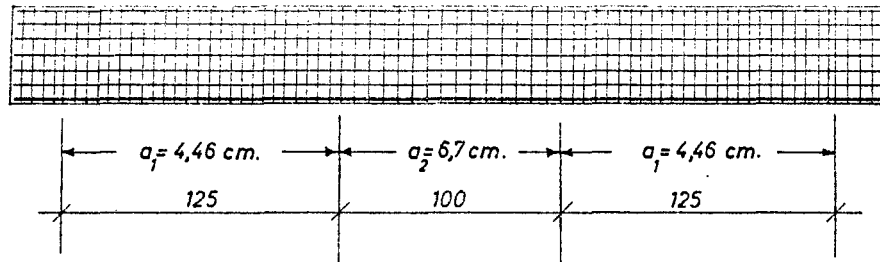
Der Prüfkörper QT 2 setzt sich zusammen aus dem Prüfkörper VS 2 mit einer zusätzlichen Bewehrung gemäß QT 2B

Versuchsbalken QT 2

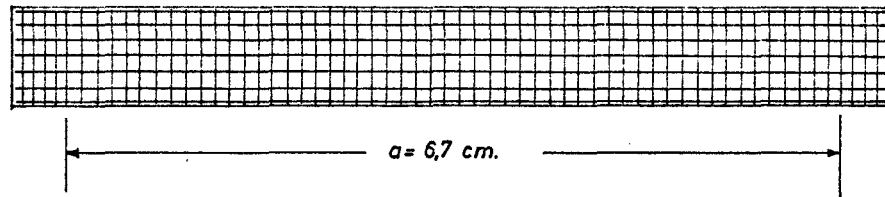
Institut für Baustoffkunde und Stahlbetonbau
Technische Hochschule Braunschweig
Amtliche Materialprüfanstalt für das Bauwesen

Bild 40.

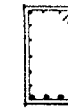
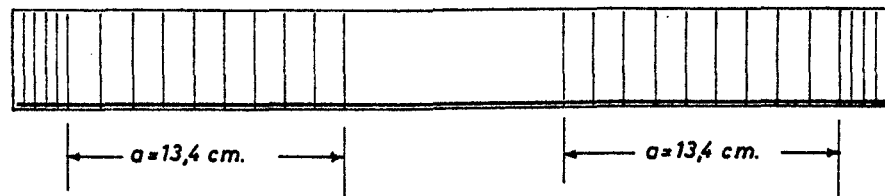
QT 3



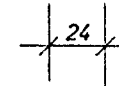
VS 3



QT 3B



4 III b $\phi 20 \text{ mm}$. $\hat{=} Fe = 12,56 \text{ cm}^2$



4 III b $\phi 6 \text{ mm}$. $\hat{=} Fe = 1,13 \text{ cm}^2$



$Fe = 12,56 - 1,13 = 11,43 \text{ cm}^2$

Bügel } III b $\phi 6 \text{ mm}$.
Längseisen }

Bemerkung:

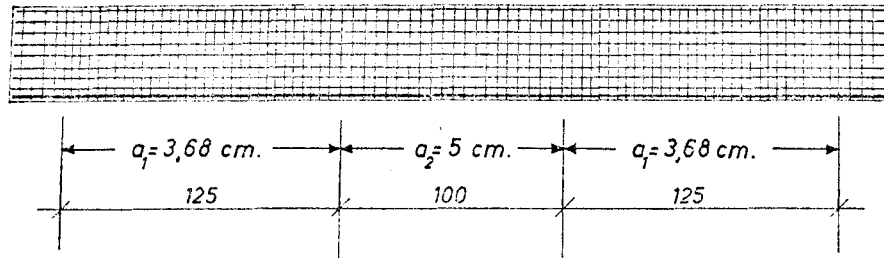
Der Prüfkörper QT 3 setzt sich zusammen aus dem Prüfkörper VS 3 mit einer zusätzlichen Bewehrung gemäß QT 3B

Versuchsbalken QT 3

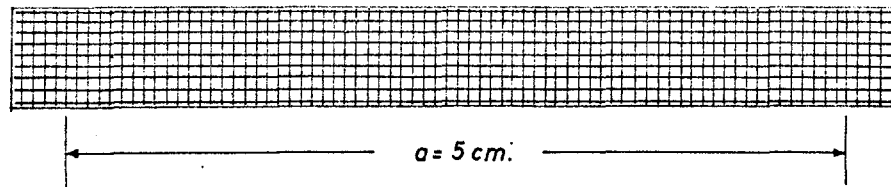
Institut für Baustoffkunde und Stahlbetonbau
Technische Hochschule Braunschweig
Amtliche Materialprüfanstalt für das Bauwesen

Bild 41.

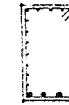
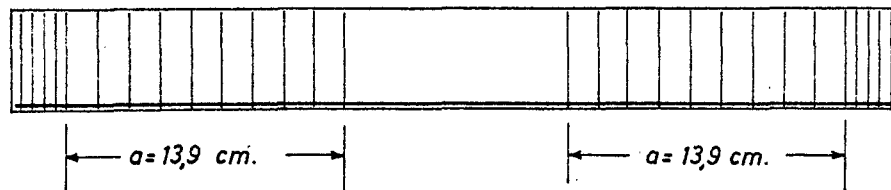
QT 4



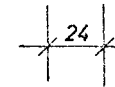
VS 4



QT 4B



4 III b ϕ 20 mm $\hat{=} Fe = 12,56 \text{ cm}^2$



5 III b ϕ 6 mm $\hat{=} Fe = 1,42 \text{ cm}^2$



$Fe = 12,56 - 1,42 = 11,14 \text{ cm}^2$

Bügel }
Längseisen } III b ϕ 6 mm.

Bemerkung:

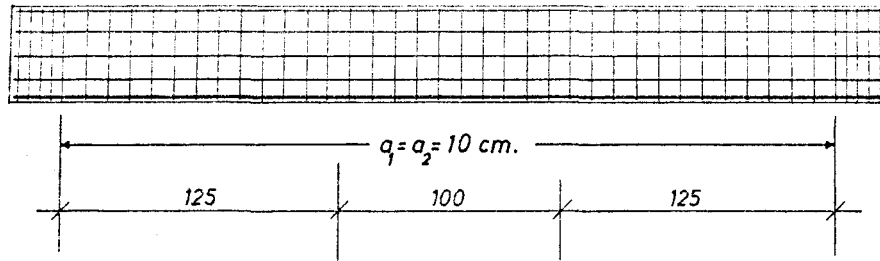
Der Prüfkörper QT 4 setzt sich zusammen aus dem Prüfkörper VS 4 mit einer zusätzlichen Bewehrung gemäß QT 4B

Versuchsbalken QT 4

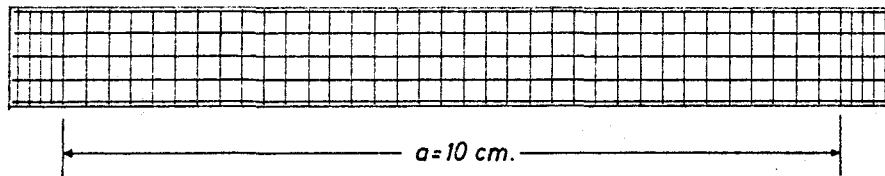
Institut für Baustoffkunde und Stahlbetonbau
Technische Hochschule Braunschweig
Amtliche Materialprüfanstalt für das Bauwesen

Bild 42.

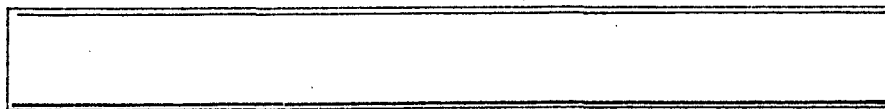
QT 2,4



VS 2,4



QT 2,4B

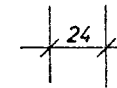


Keine Bügel für die Querkraft



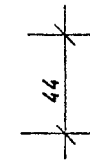
5 III b ϕ 6 mm. $\hat{=}$ $Fe = 1,42 \text{ cm}^2$

4 III b ϕ 20 mm. $\hat{=}$ $Fe = 12,56 \text{ cm}^2$



3 III b ϕ 6 mm. $\hat{=}$ $Fe = 0,85 \text{ cm}^2$

3 III b ϕ 6 mm. $\hat{=}$ $Fe = 0,85 \text{ cm}^2$



2 III b ϕ 6 mm. $\hat{=}$ $Fe = 0,57 \text{ cm}^2$

$Fe = 12,56 - 0,85 = 11,71 \text{ cm}^2$

Bügel
Längseisen } III b ϕ 6 mm.

Bemerkung:

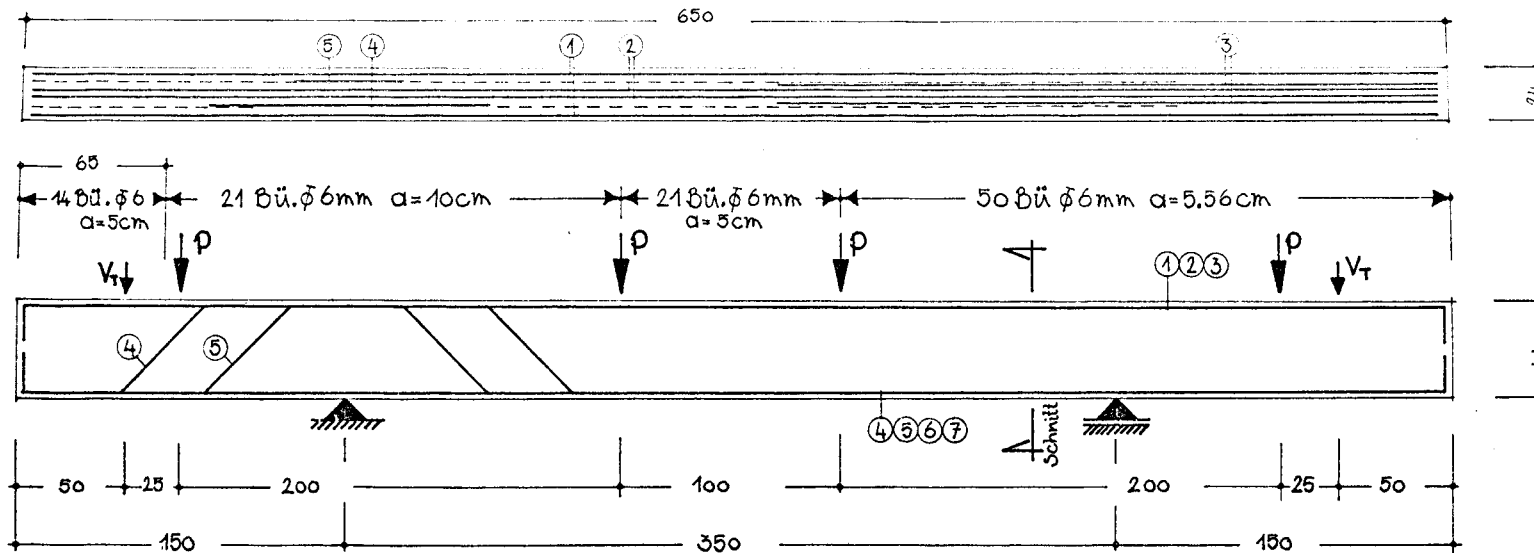
Der Prüfkörper QT 2,4 setzt sich zusammen aus dem Prüfkörper VS 2,4 mit einer zusätzlichen Bewehrung gemäß QT 2,4B

Versuchsbalken QT 2,4

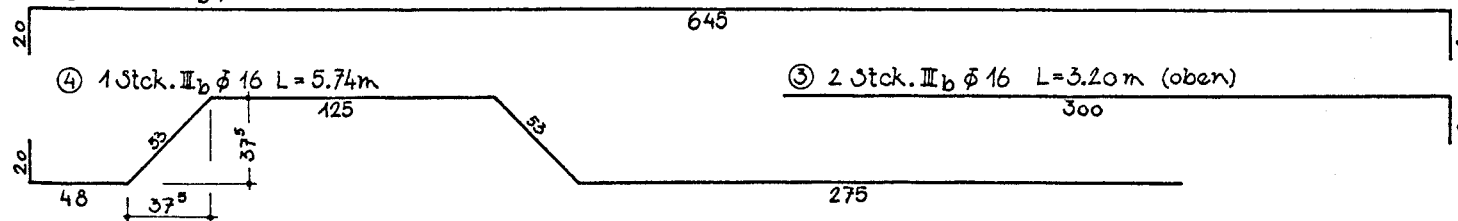
Institut für Baustoffkunde und Stahlbetonbau
Technische Hochschule Braunschweig
Amtliche Materialprüfanstalt für das Bauwesen

Bild 43.

Draufsicht

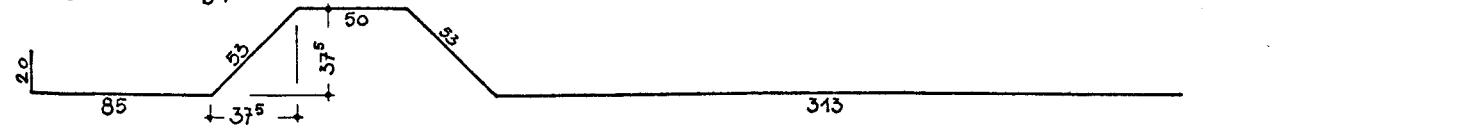


- ① 2 Stck. III_b Ø 20 L = 6.85 m (oben)
- ② 2 Stck. III_b Ø 12 L = 6.85 m (oben)



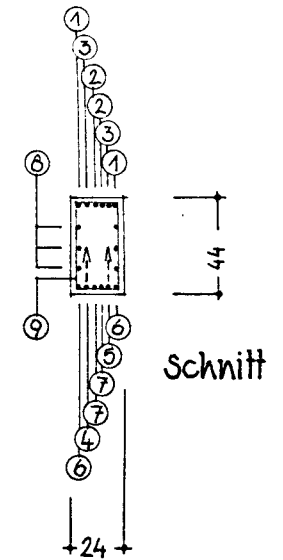
- ④ 1 Stck. III_b Ø 16 L = 5.74 m

- ③ 2 Stck. III_b Ø 16 L = 3.20 m (oben)

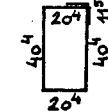


- ⑤ 1 Stck. III_b Ø 16 L = 5.74 m
- ⑥ 2 Stck. III_b Ø 20 L = 6.85 m (unten)
- ⑦ 2 Stck. III_b Ø 12 L = 6.85 m (unten)

- ⑧ 6 Stck. III_b Ø 6 L = 6.45 m



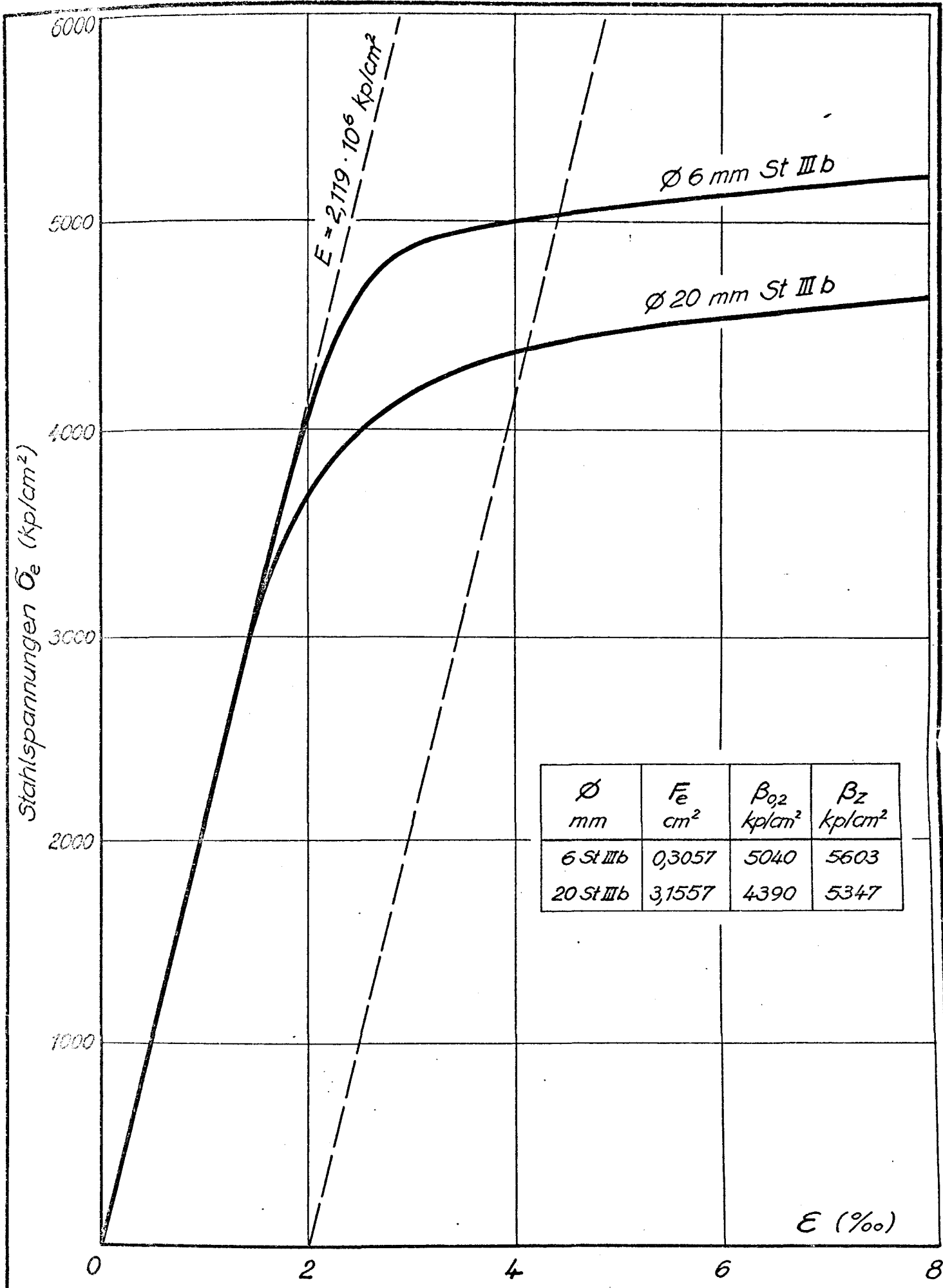
- ⑨ 106 Stck. III_b Ø 6 L = 1.45 m



Bewehrungsplan Versuchsbalken QT 2,5-26

Institut für Baustoffkunde und Stahlbetonbau
Technische Universität Braunschweig
Amtliche Materialprüfanstalt für das Bauwesen

Bild 44



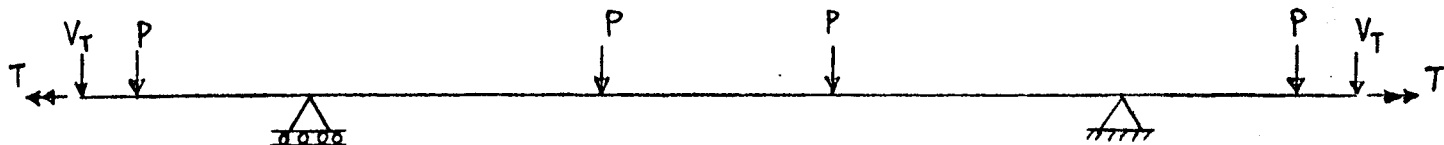
SPANNUNGS-DEHNUNGS-LINIEN DER STÄHLE

Bild 46.

Institut für Baustoffkunde und Stahlbetonbau
Technische Hochschule Braunschweig

Antikörper Materialprüfanstalt für das Bauwesen

Stat. System



Dransicht

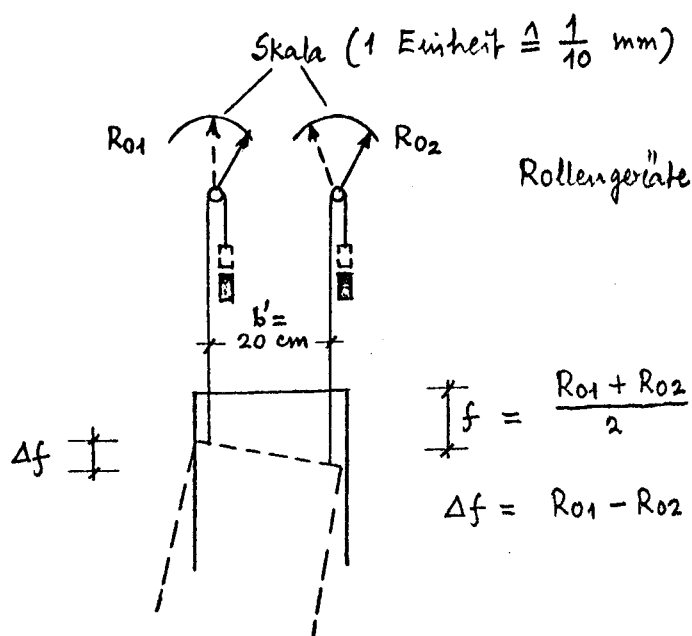
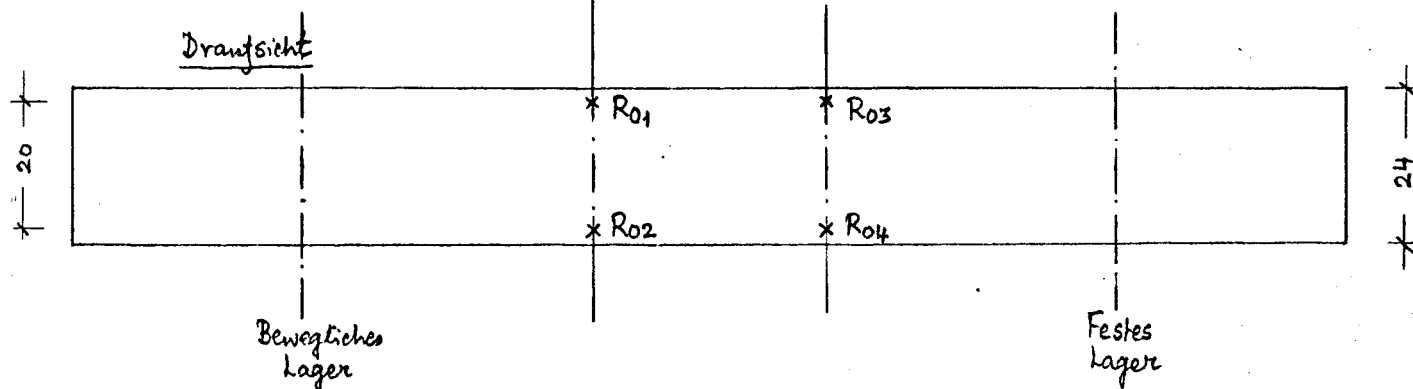
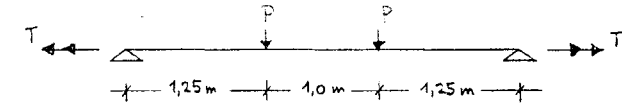
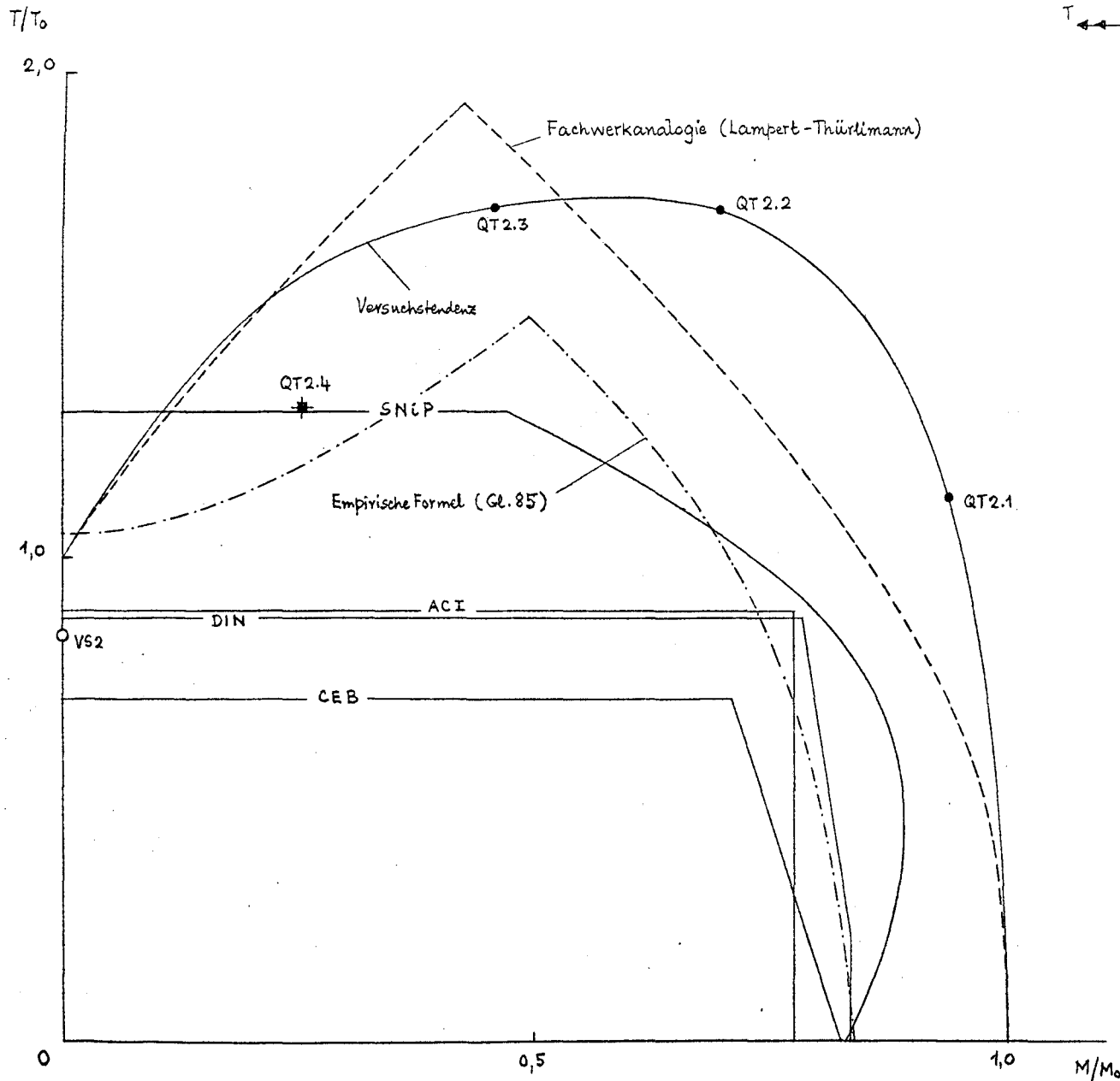


Bild 48. Anordnung der Rollengeräte und Durchbiegungsmessung.



Querschnitt : $b = 24 \text{ cm}$; $d = 44 \text{ cm}$; $h = 40,9 \text{ cm}$

- Versuchswerte QT 2 Serie
- Versuchsbalken VS 2 (Stuttgart)
- ✱ QT 2.4 (M korrigiert für die vorhandene Querkraft)

SNiP	Russische Stahlbetonbestimmungen von 1962 (SNiP II-C.1-62) (Beton Kalender 1973/II, S. 531 - 656)
CEB	CEB/FIP Richtlinien Juni 1970 mit Ergänzungs-vorschlag der CEB-Commission I vom 11.7.73.
DIN	DIN 1045 (Stand 1972)
ACI	Amerikanische Stahlbetonbestimmungen von 1971 (ACI-318 /1971)

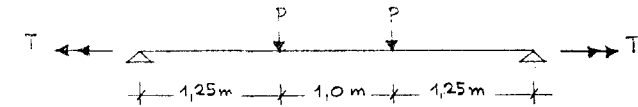
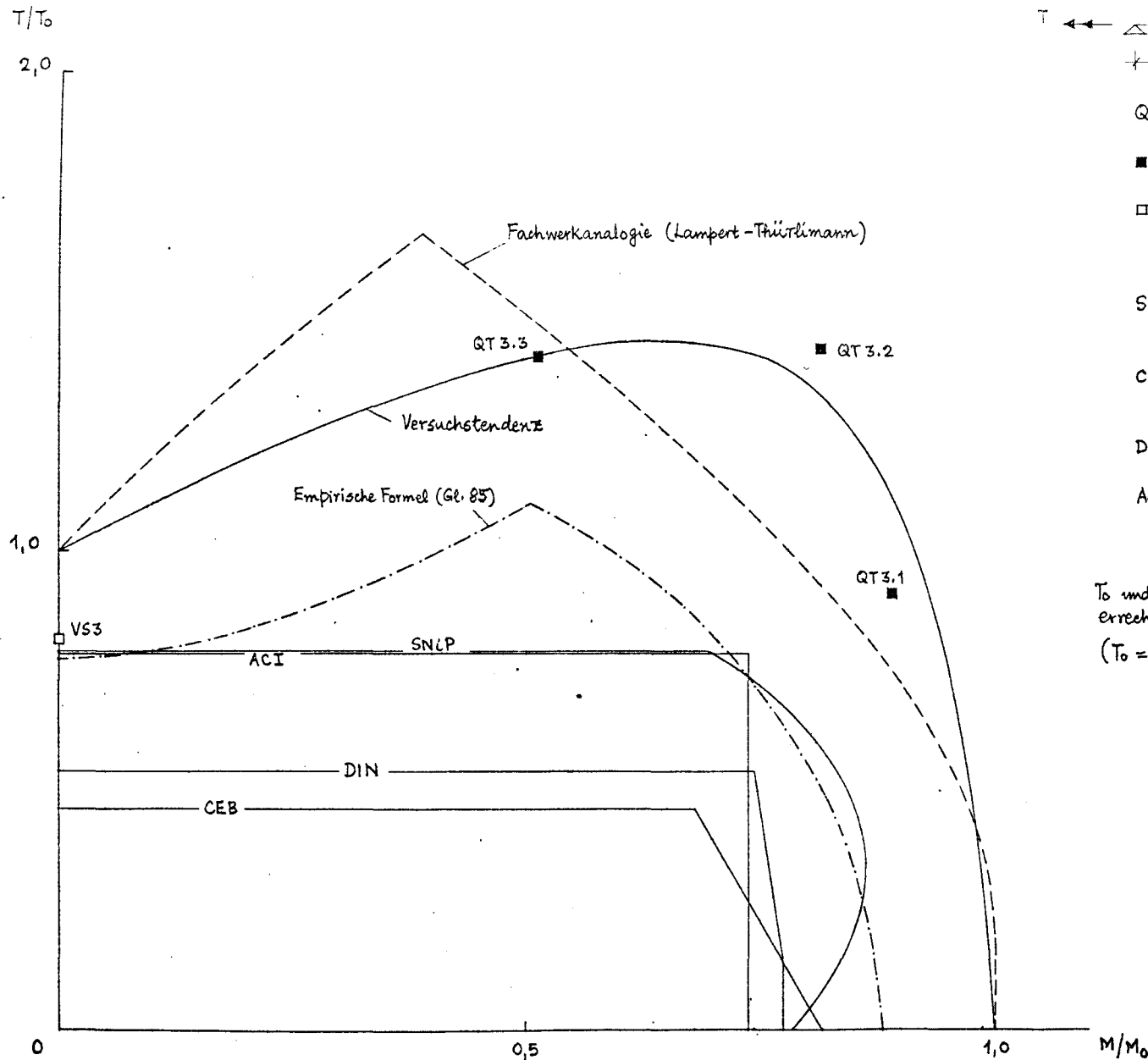
T_0 und M_0 nach der Fachwerkanalogie (Lampert-Thürdimann) errechnet !

($T_0 = 2,38 \text{ Mpm}$; $M_0 = 23,4 \text{ Mpm}$)

BILD 50.

TORSION - Biegemoment - Interaktion

(Balken QT 2.1 ; QT 2.2 und QT 2.3)



Querschnitt : $b = 24\text{ cm}$; $d = 44\text{ cm}$; $h = 40,9\text{ cm}$

■ Versuchswerte QT3 Serie

□ Versuchsbalken VS3 (Stuttgart)

SNiP Russische Stahlbetonbestimmungen von 1962 (SNiP II-C.1-62) (Beton Kalender 1973/II ; S. 531-656)

CEB CEB/FIP Richtlinien Juni 1940 mit Ergänzungs-vorschlag der CEB-Commission I vom 11.7.73

DIN DIN 1045 (Stand 1972)

ACI Amerikanische Stahlbetonbestimmungen von 1971 (ACI-318/1971)

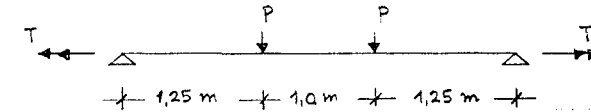
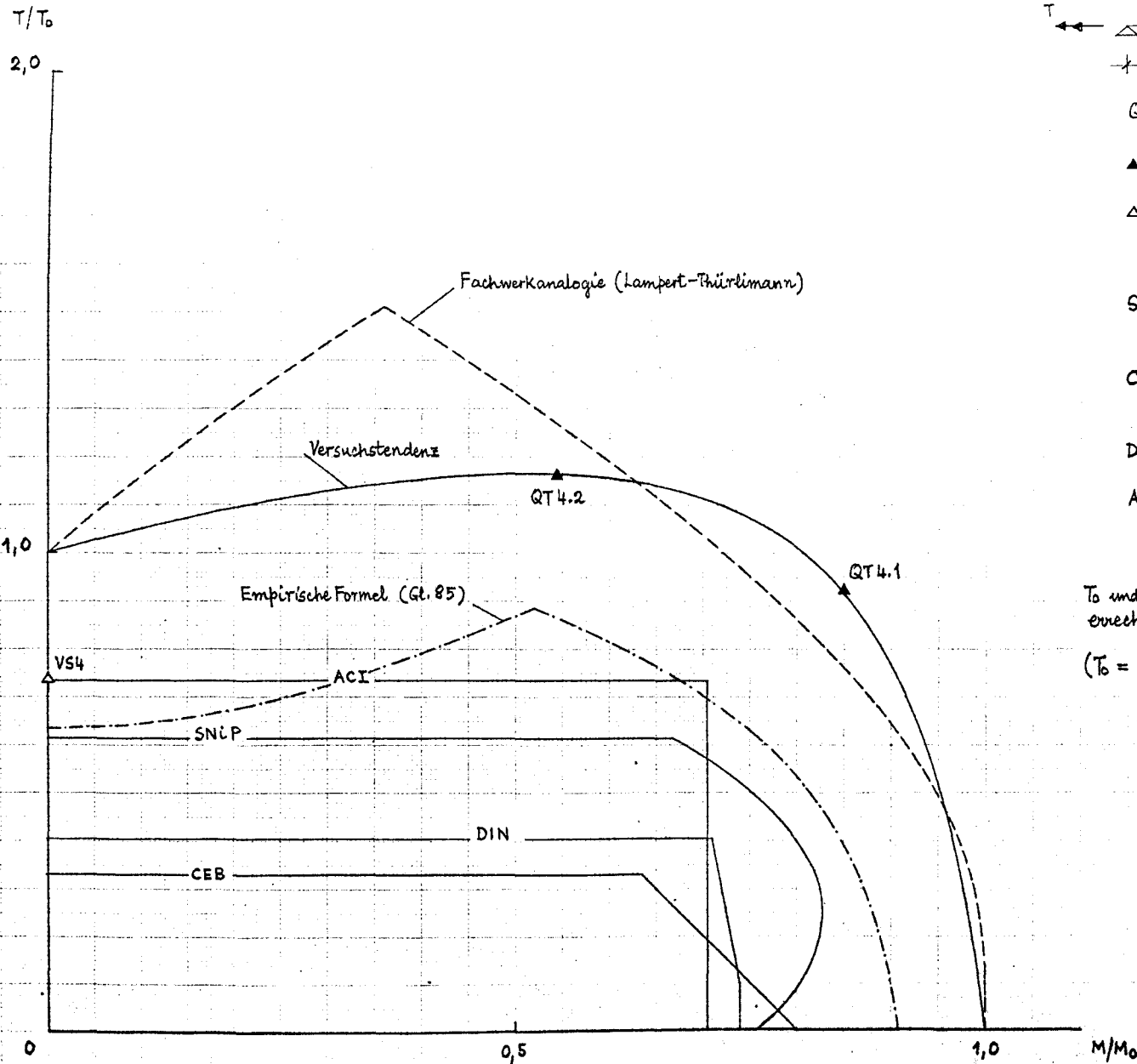
T_0 und M_0 nach der Fachwerkanalogie (Lambert-Thiirliemann) errechnet !

($T_0 = 3,55\text{ Mpm}$; $M_0 = 24,6\text{ Mpm}$)

BILD 51.

Torsion - Biegemoment - Interaktion

(Balken QT3.1 ; QT3.2 und QT3.3)



Querschnitt: $b = 24 \text{ cm}$; $d = 44 \text{ cm}$; $h = 40,9 \text{ cm}$

▲ Versuchswerte QT4 Serie

△ Versuchsbalken VS4 (Stuttgart)

SNiP Russische Stahlbetonbestimmungen von 1962 (SNiP II-C.1-62) (Beton Kalender 1973/II; S. 531-656)

CEB CEB/FIP Richtlinien Juni 1970 mit Ergänzungsvorschlag der CEB-Commission V vom 11.7.73

DIN DIN 1045 (Stand 1972)

ACI Amerikanische Stahlbetonbestimmungen von 1971 (ACI-318/1971)

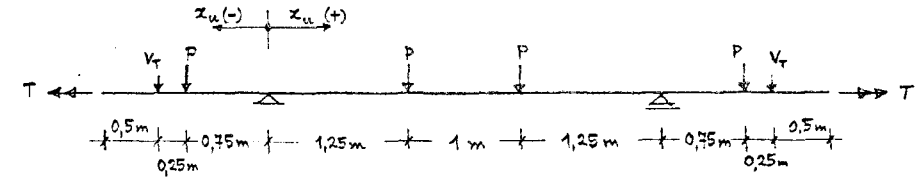
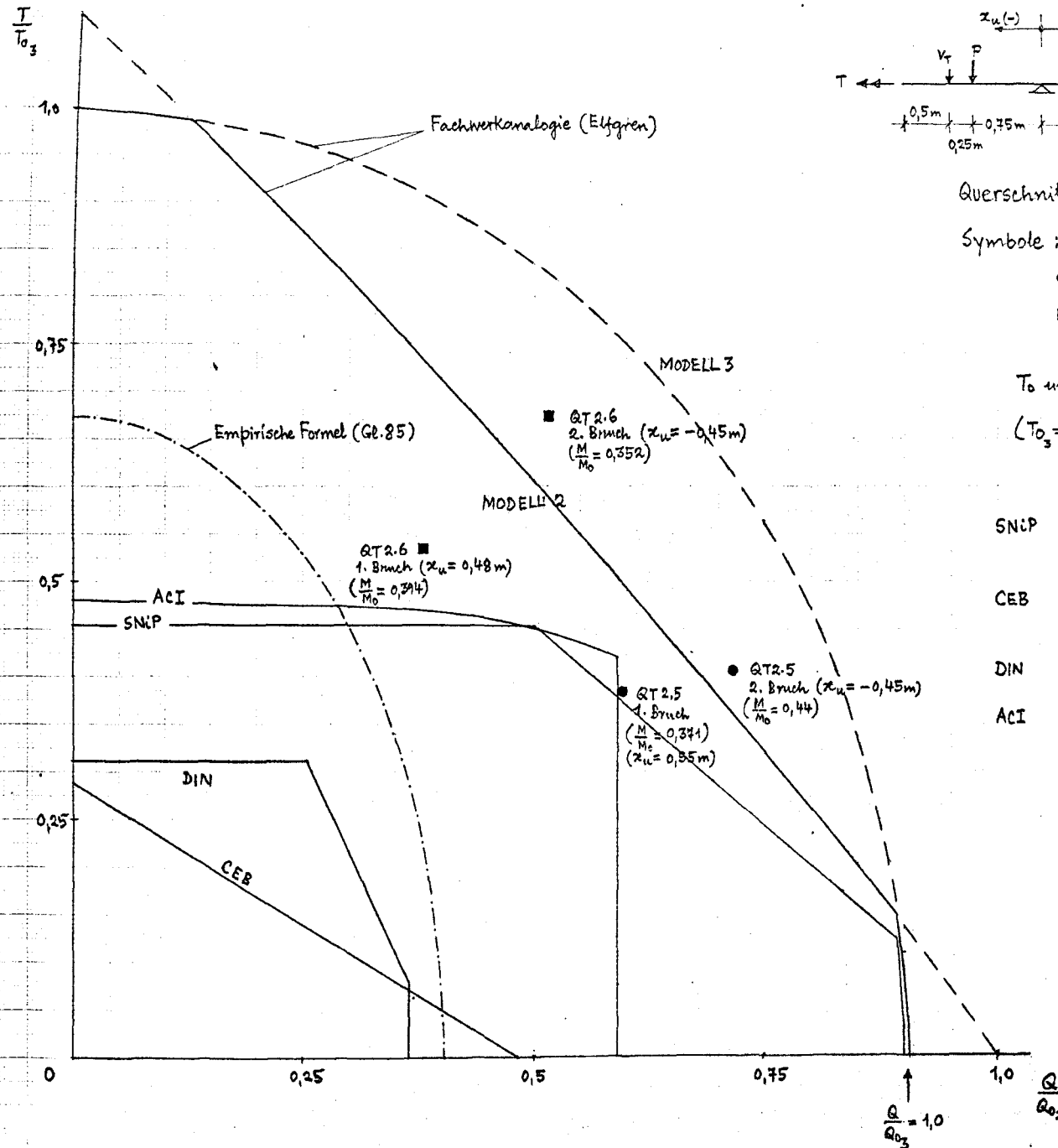
T_0 und M_0 nach der Fachwerkkanalogie (Lampert-Thürklimmann) errechnet!

($T_0 = 4,75 \text{ Mpm}$; $M_0 = 25,8 \text{ Mpm}$)

BILD 52

Torsion-Biegemoment-Interaktion

(Balken QT4.1 und QT4.2)



Querschnitt : $b = 24\text{ cm}$; $d = 44\text{ cm}$; $h = 40,9\text{ cm}$

Symbole :

- QT 2.5
- QT 2.6

T_0 und Q_0 nach der Fachwerkkanalogie errechnet.

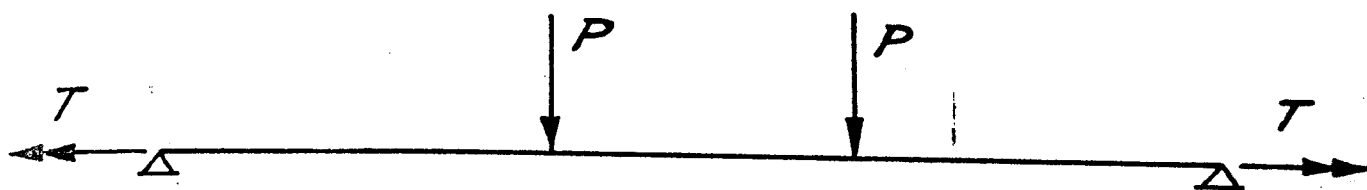
($T_0 = 5,88\text{ Mpm}$; $Q_0 = 40,8\text{ Mp}$)

- SNiP Russische Stahlbetonbestimmungen von 1962 (SNiP II-C.1-62) (Beton Kalender 1973/II ; S. 531-656)
- CEB CEB/FIP Richtlinien Juni 1970 mit Ergänzungsvorschlag der CEB-Commission V vom 11.7.73
- DIN DIN 1045 (Stand 1972)
- ACI Amerikanische Stahlbetonbestimmungen von 1971 (ACI-318/1971)

BILD 53.

Torsion - Querkraft - Interaktion

(Balken QT2.5 und QT2.6)



P/P_0

0,262

0,349

0,436

0,523

0,610

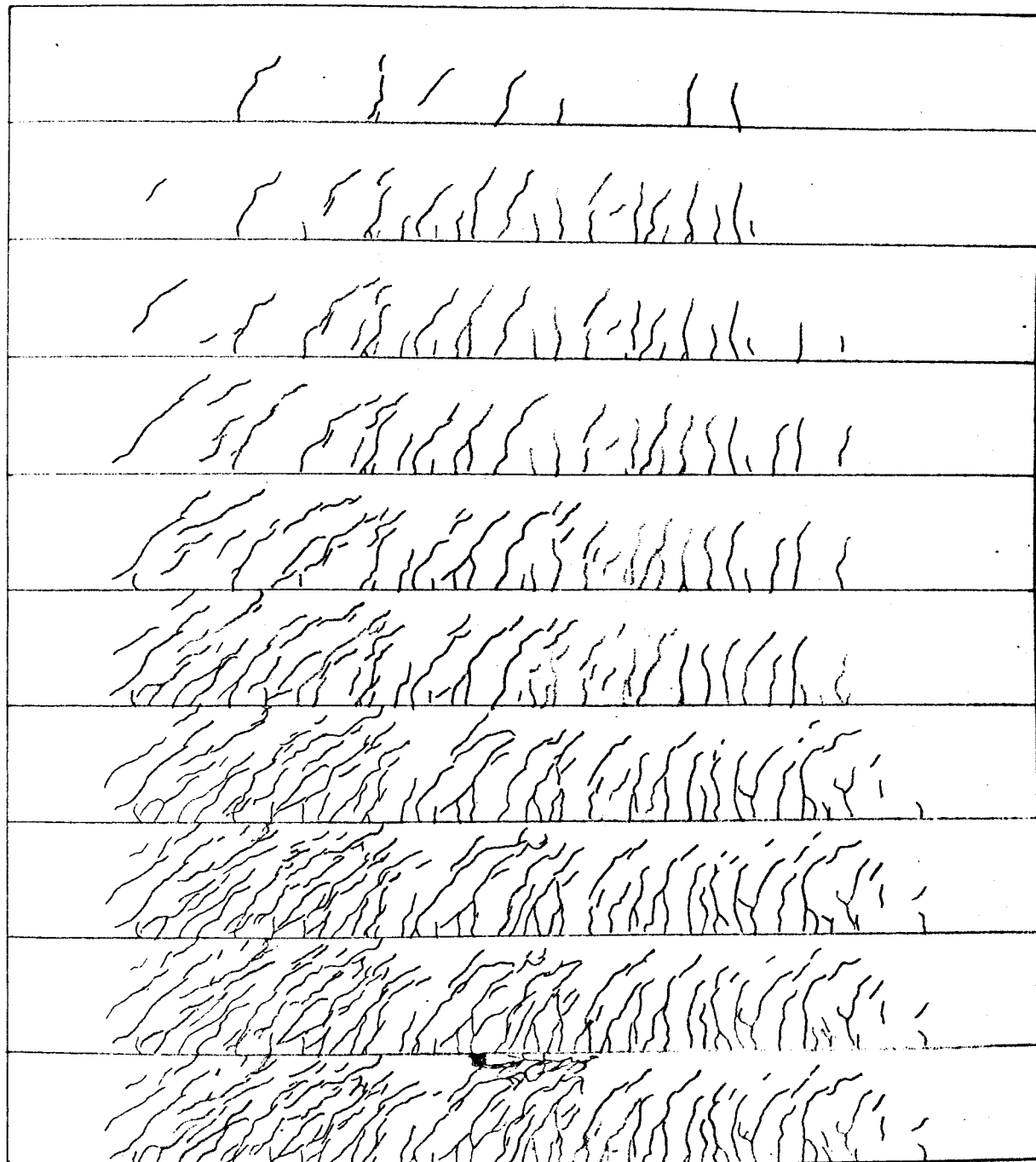
0,668

0,741

0,828

0,915

Bruch

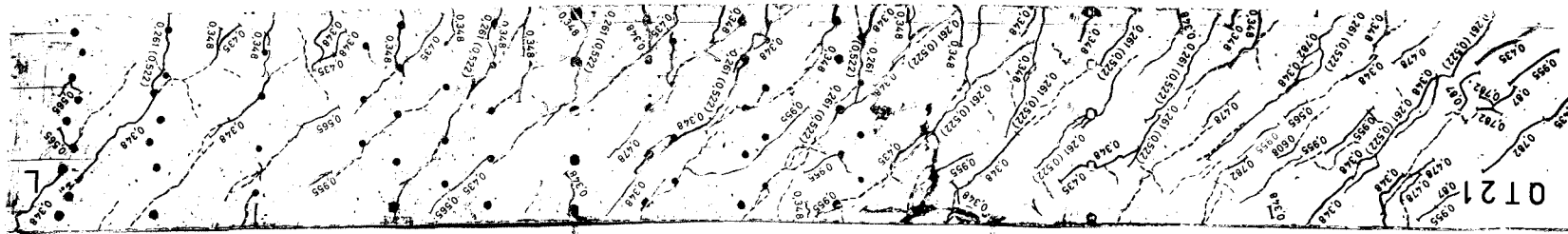


RISSENTWICKLUNG

PRÜFKÖRPER: QT 3,1

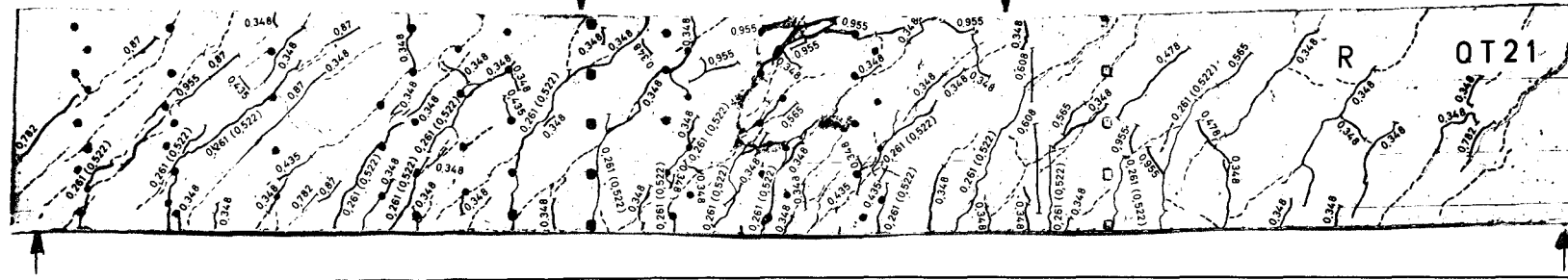
RECHTE SEITE

Bild 54.

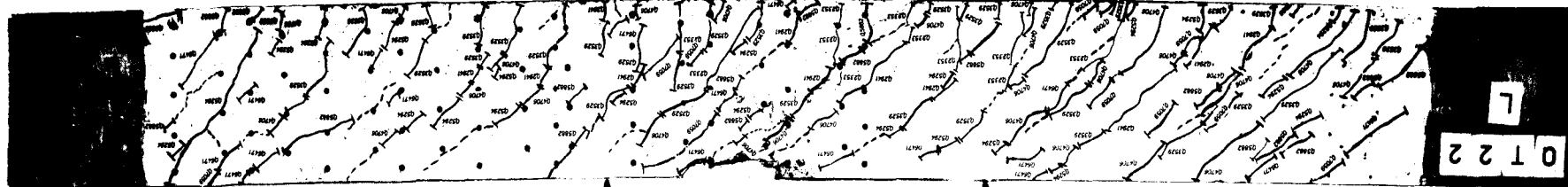


LINKS

BALKEN QT 2.1

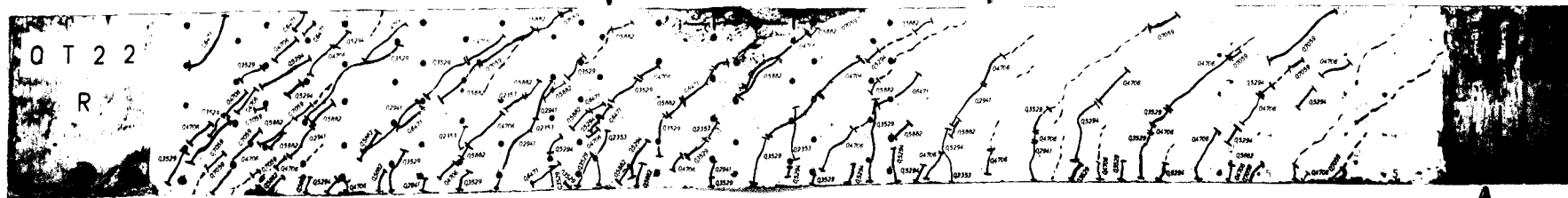


RECHTS



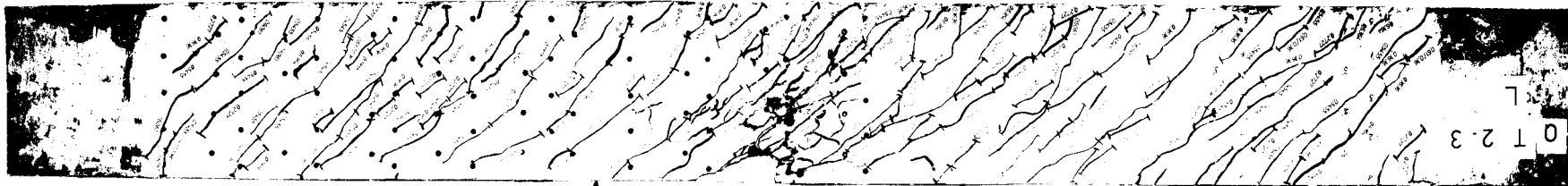
LINKS

BALKEN QT 2.2



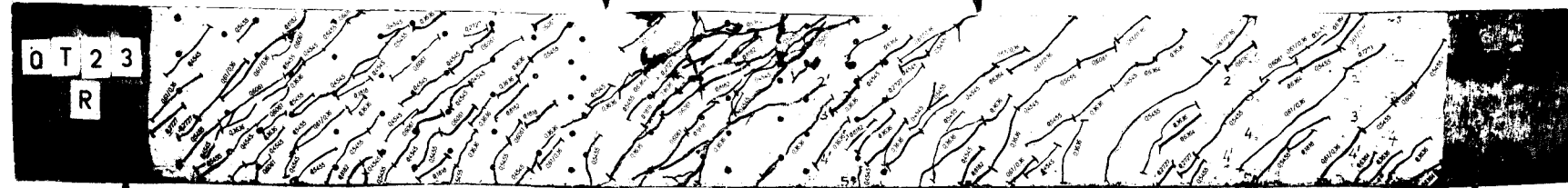
RECHTS

BILD 55. RISSBILDER (ABGEWICKELT)

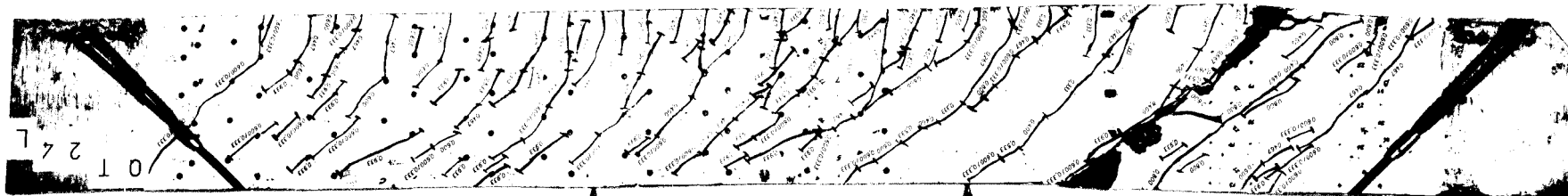


LINKS

BALKEN QT 2.3

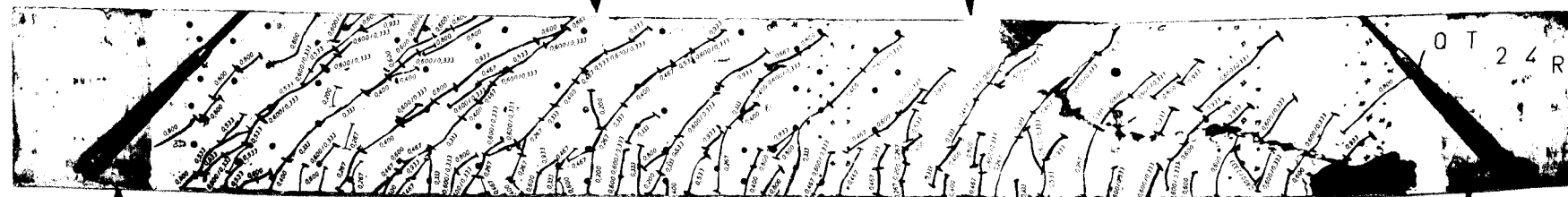


RECHTS



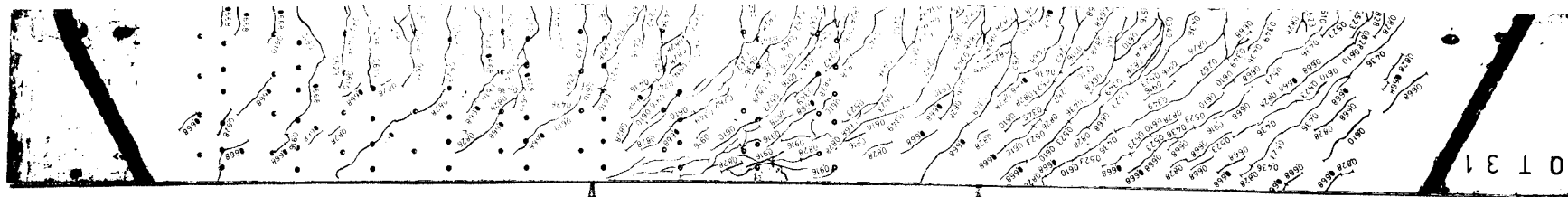
LINKS

BALKEN QT 2.4



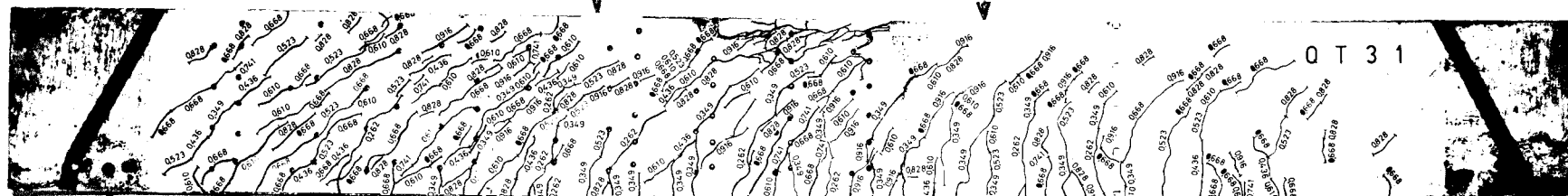
RECHTS

BILD 56. RISSBILDER (ABGEWICKELT)

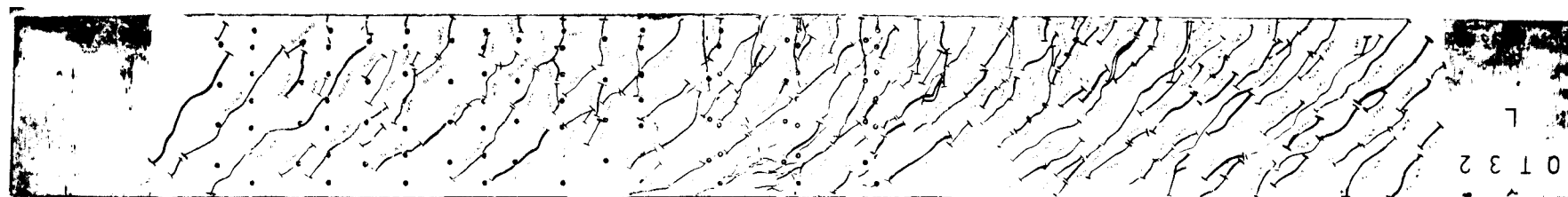


LINKS

BALKEN QT 3.1



RECHTS



LINKS

BALKEN QT 3.2



RECHTS

BILD 57. RISSBILDER (ABGEWICKELT)

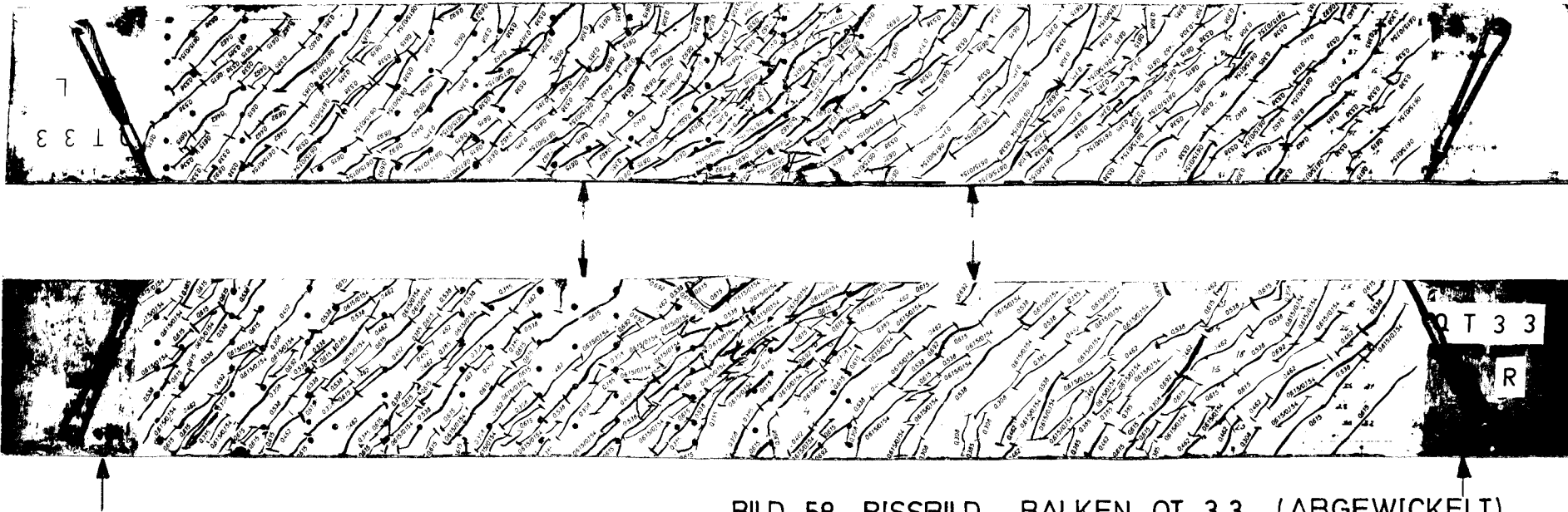
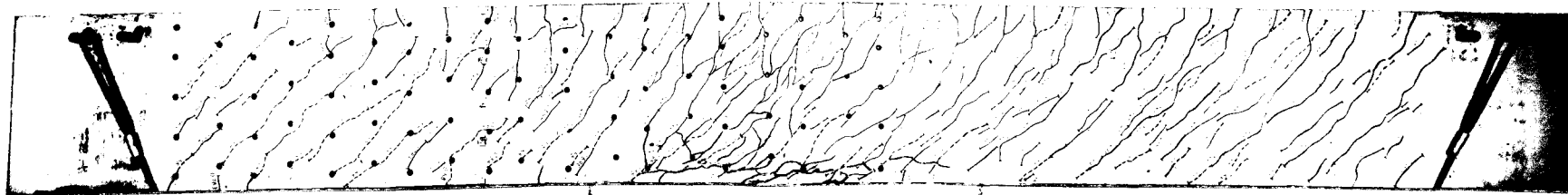
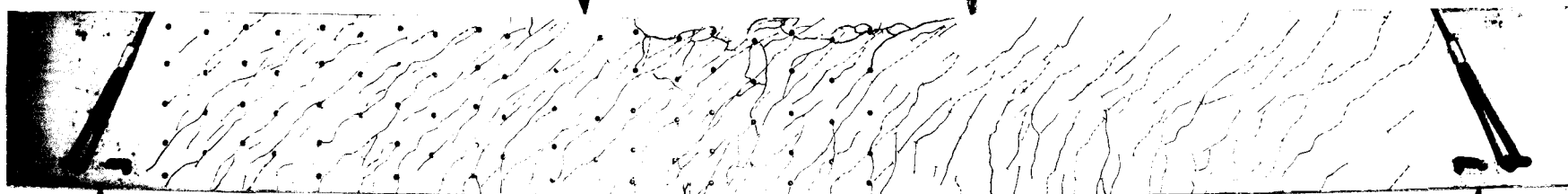


BILD 58. RISSBILD BALKEN QT 3.3 (ABGEWICKELT)



LINKS

BALKEN QT 4.1



RECHTS



LINKS

BALKEN QT 4.2



RECHTS

BILD 59. RISSBILDER (ABGEWICKELT)

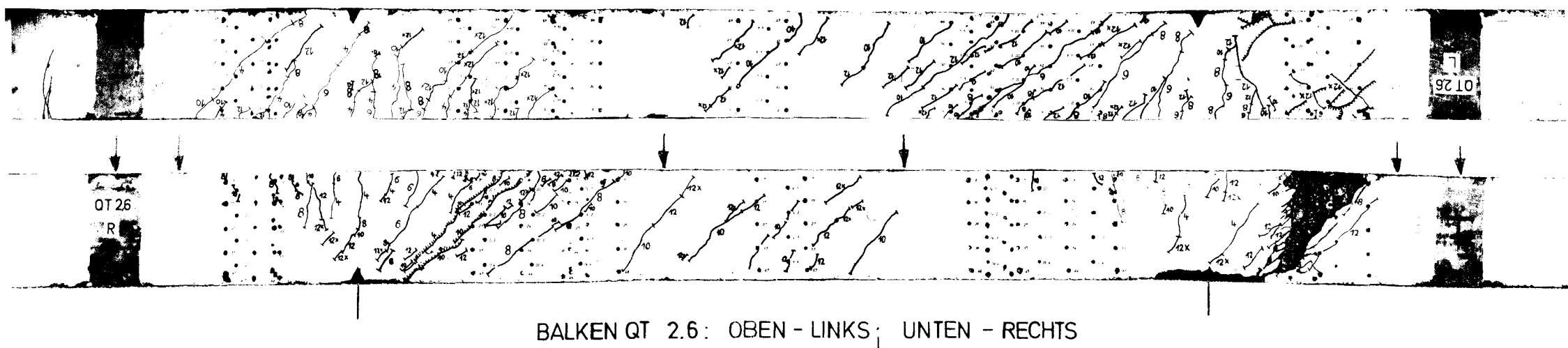
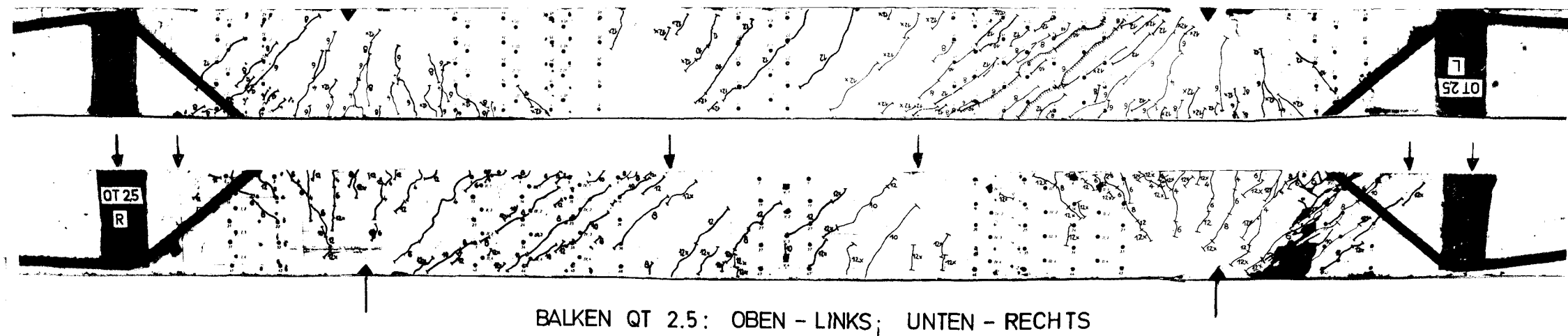


BILD 60. RISSBILDER (ABGEWICKELT)

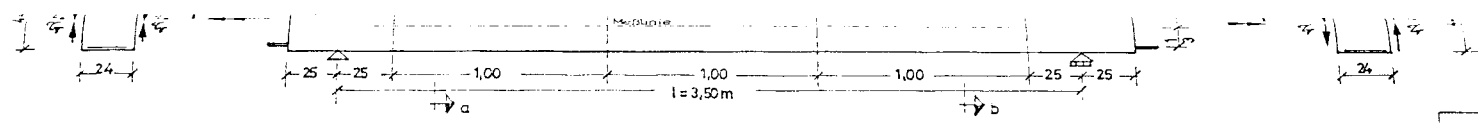


BALKEN QT 2.2 $\frac{M}{T} = 4,0$

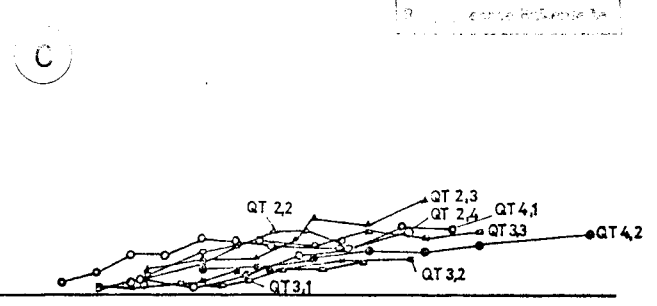
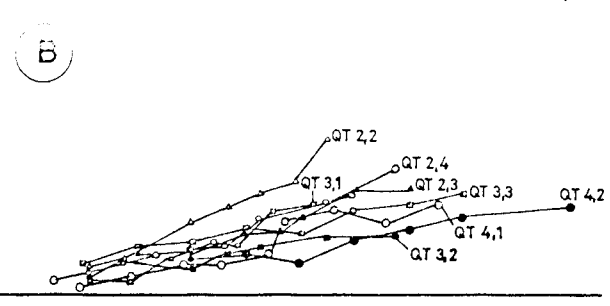
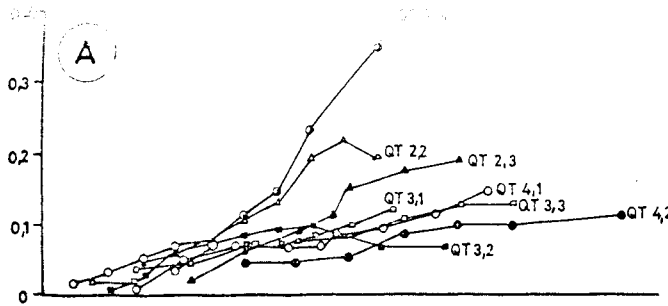


BALKEN QT 3.1 $\frac{M}{T} = 2,62$

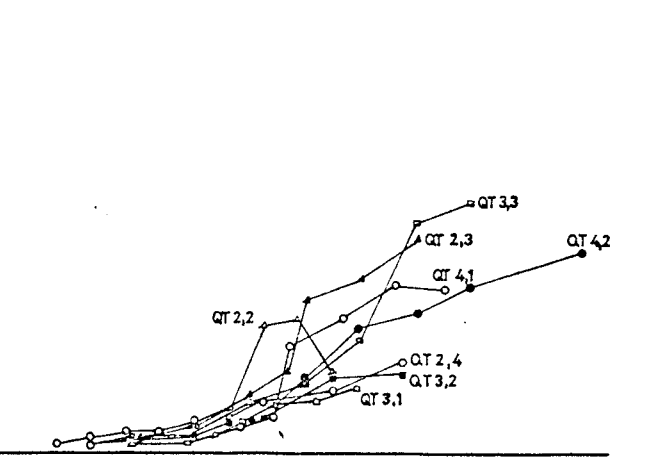
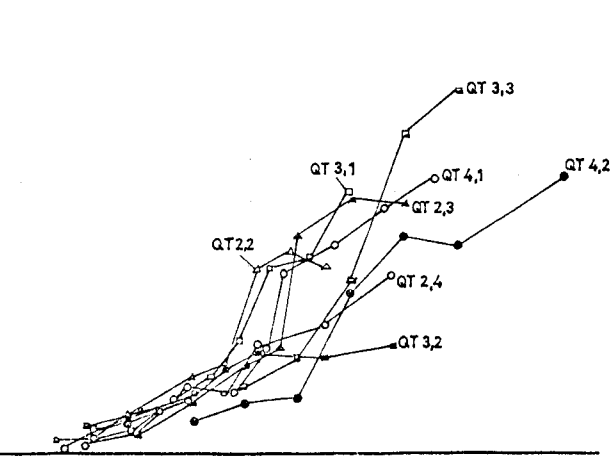
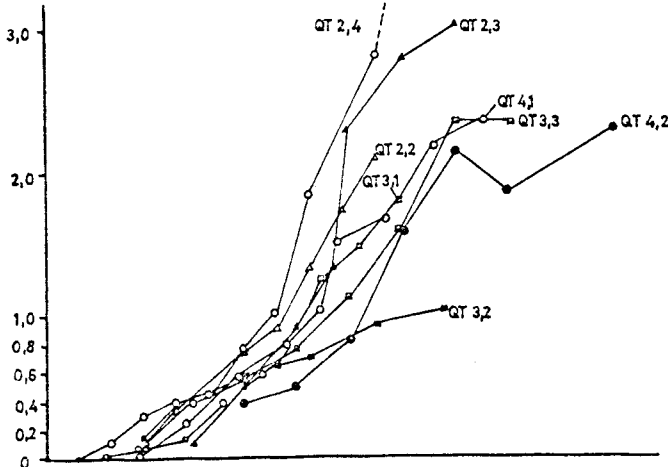
BILD 61. RISSBILDER (ABGEWICKELT)



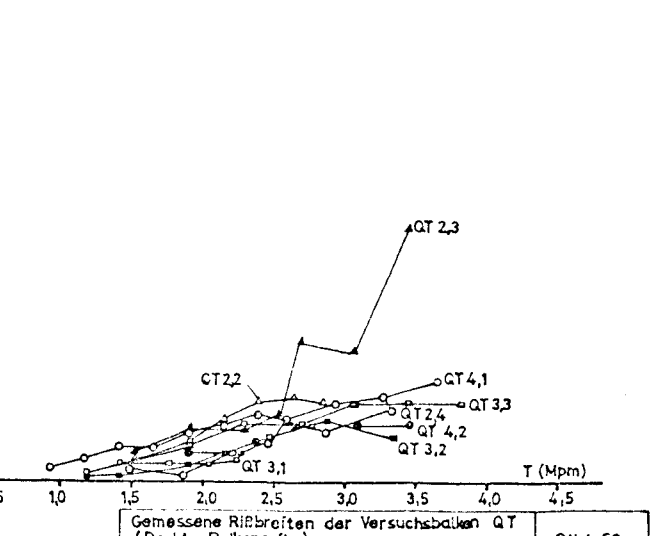
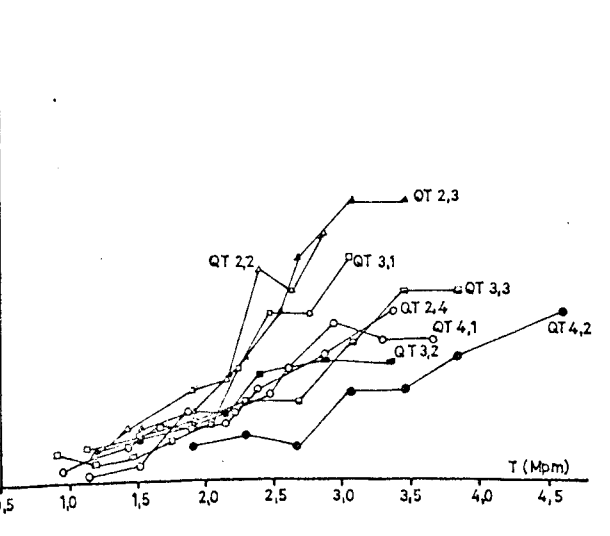
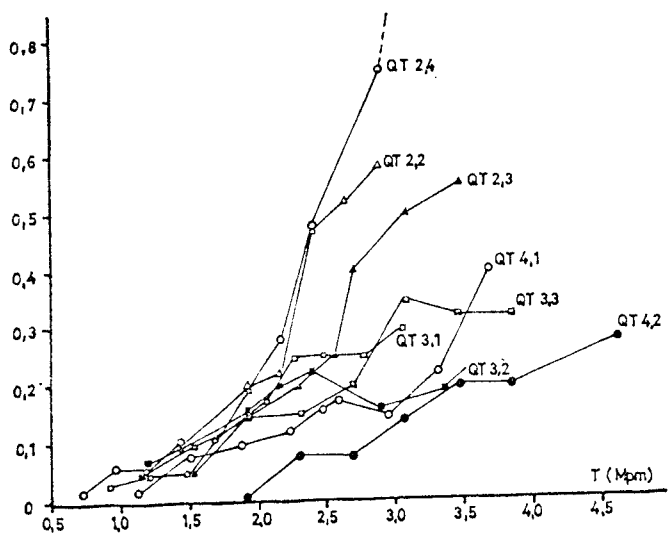
mittlere Ribbreiten (mm)



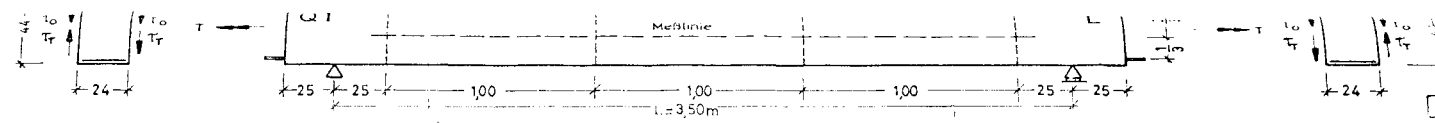
Summe der Ribbreiten (mm)



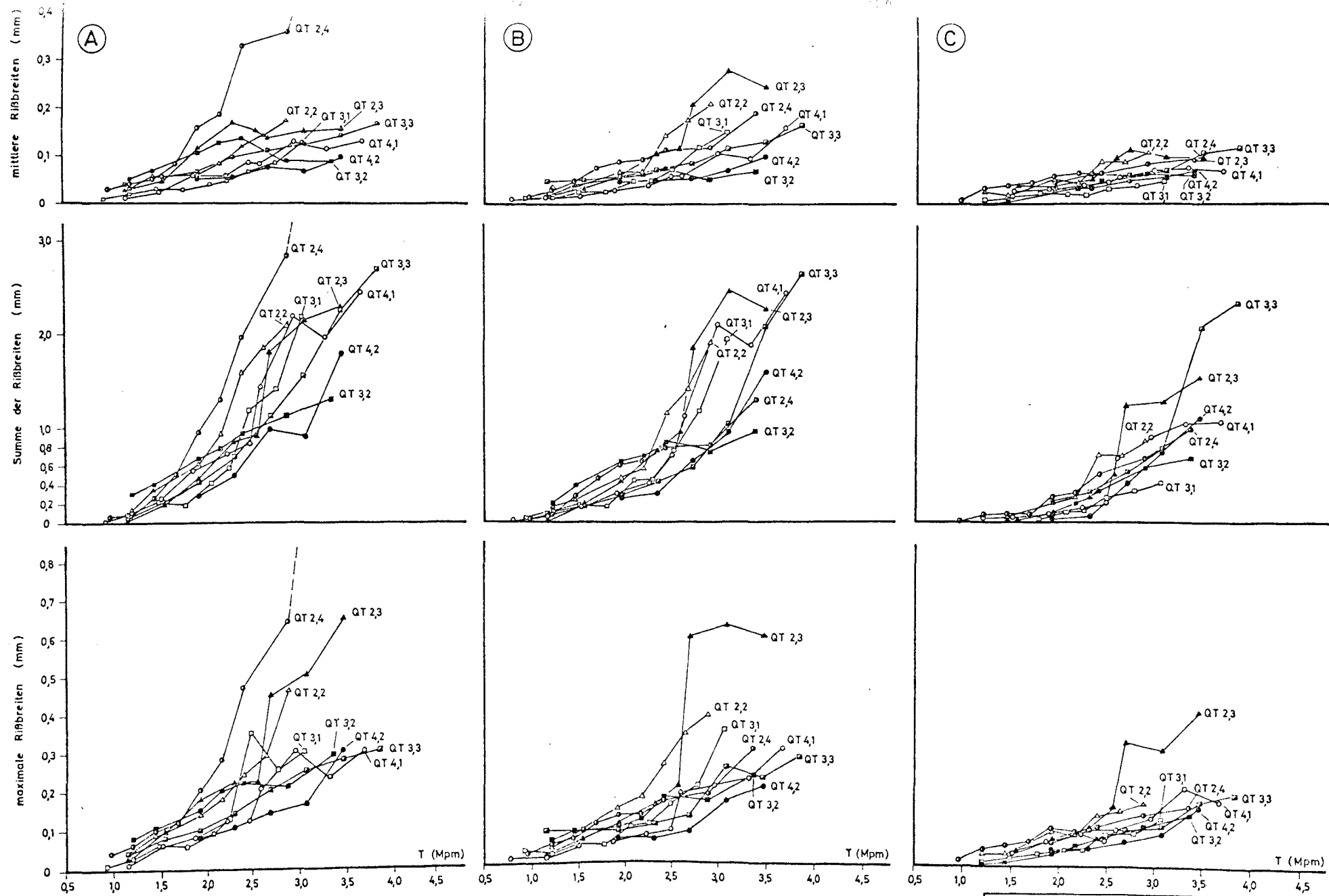
maximale Ribbreiten (mm)



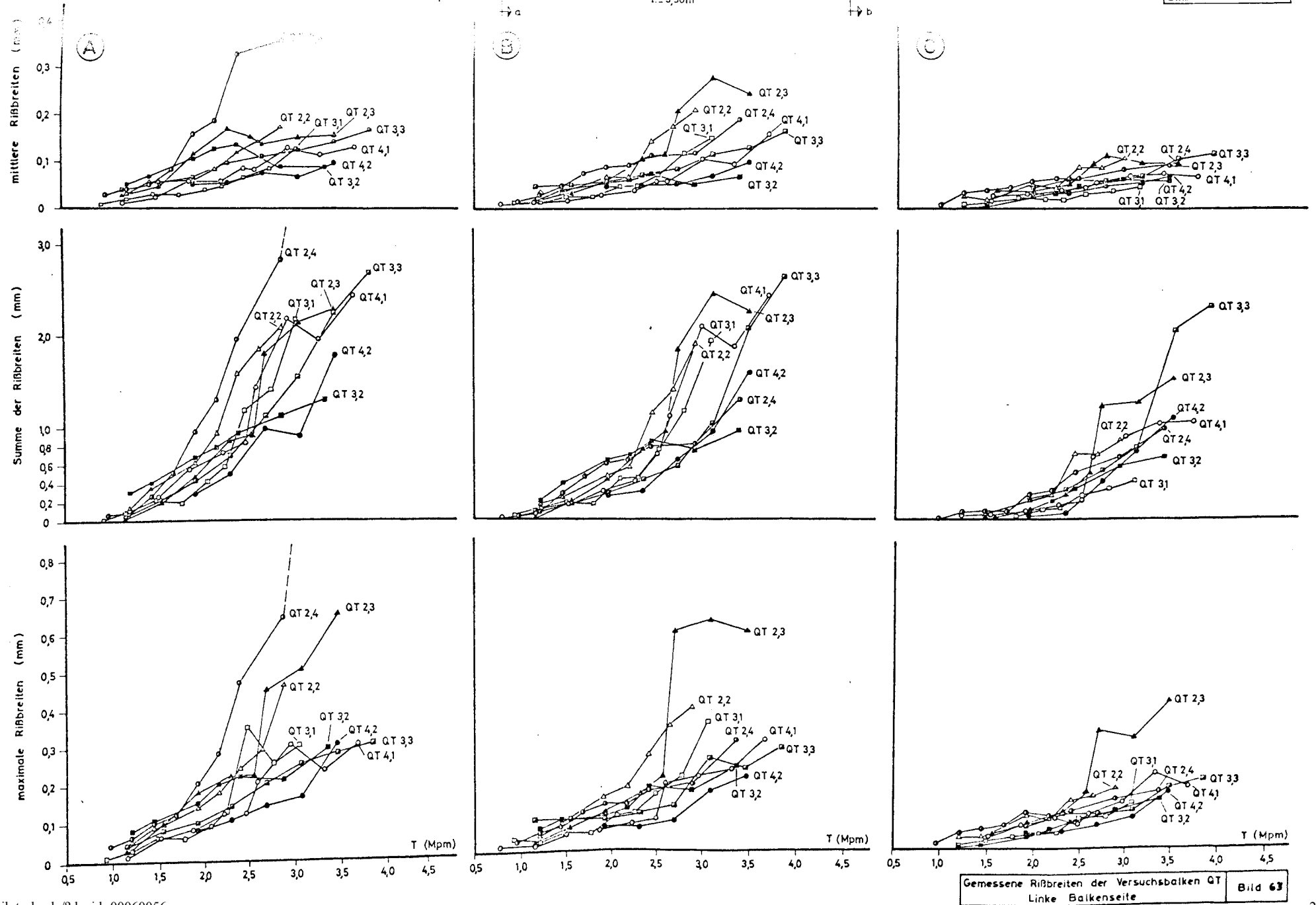
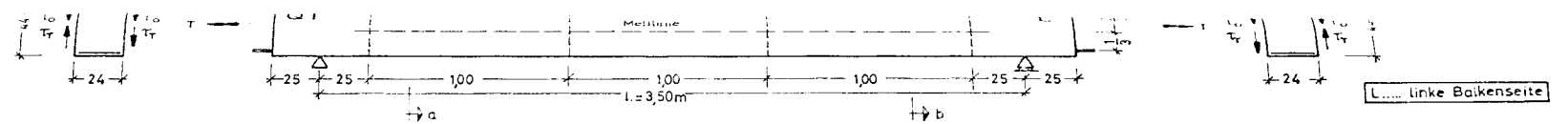
Gemessene Ribbreiten der Versuchsbalken QT (Rechte Balkenseite) Bild 62



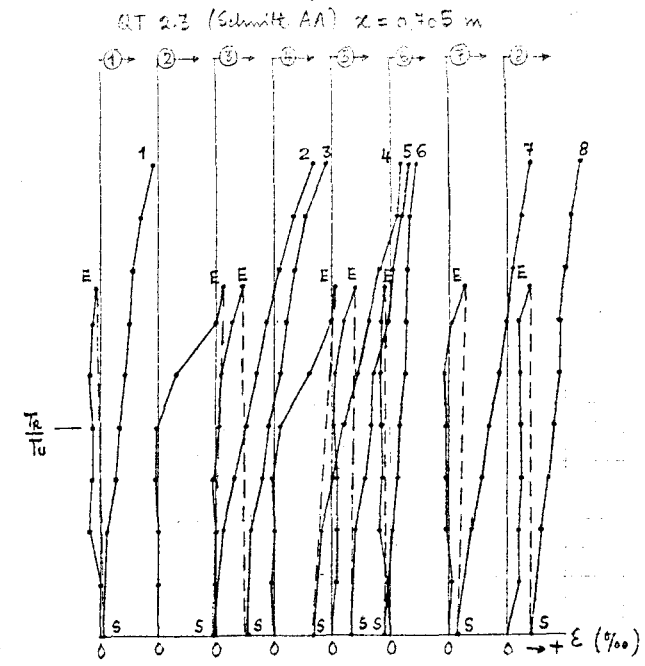
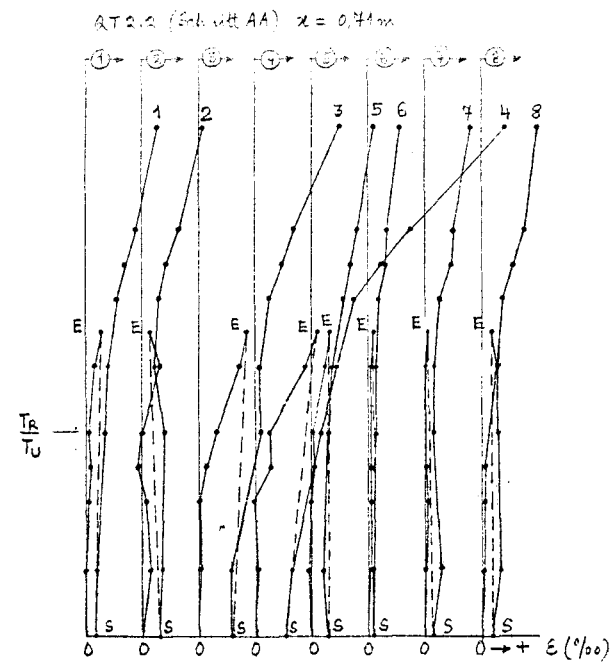
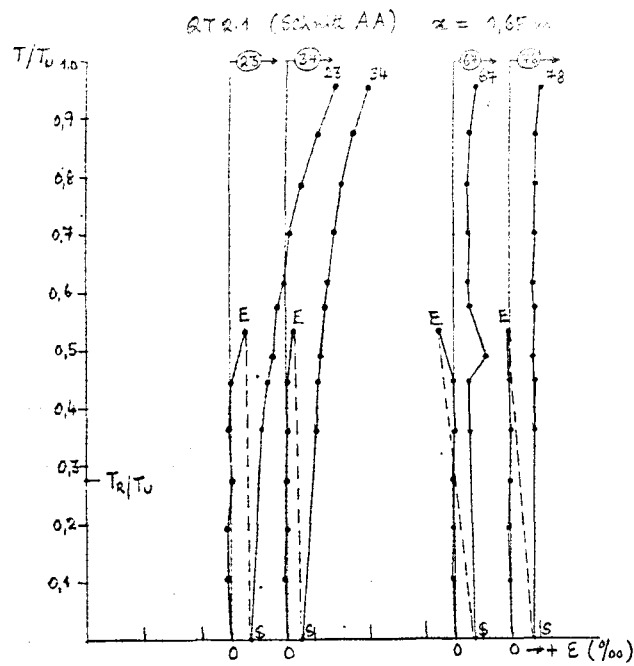
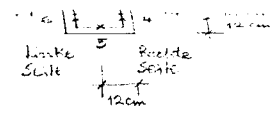
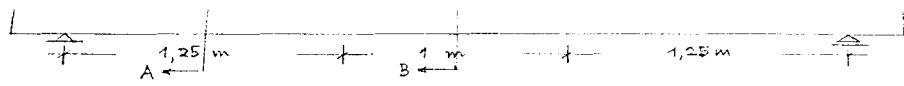
Linke Balkenseite



Gemessene Rißbreiten der Versuchsbalken QT
Linke Balkenseite



Anfang der Brücke nach dem
Belastungsbeginn nach der
Schwellbeanspruchung



Maßstab für ϵ :
0 1 2 ‰

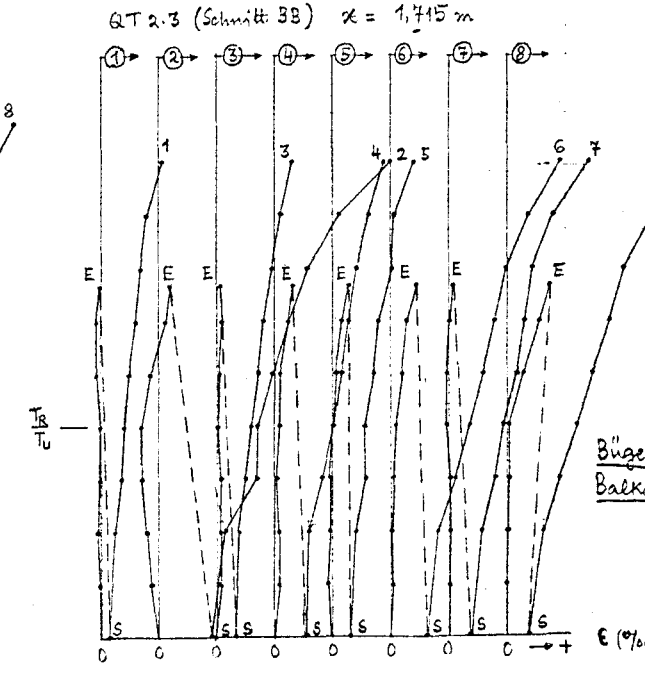
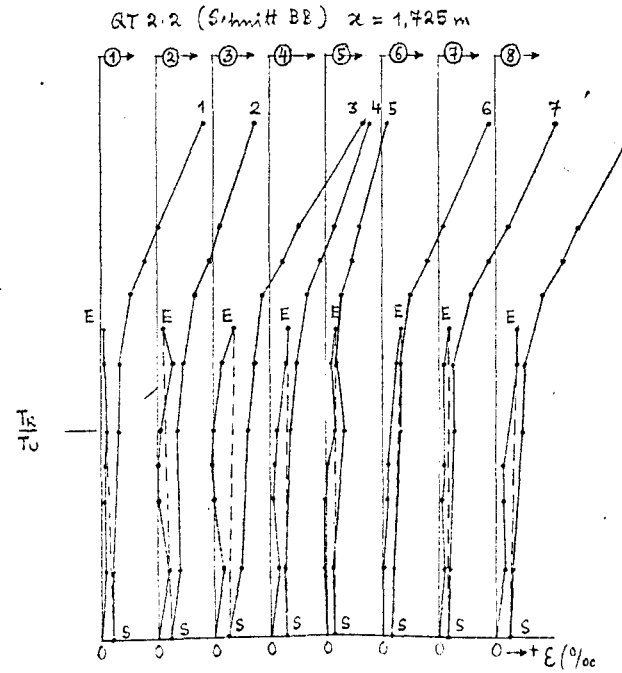
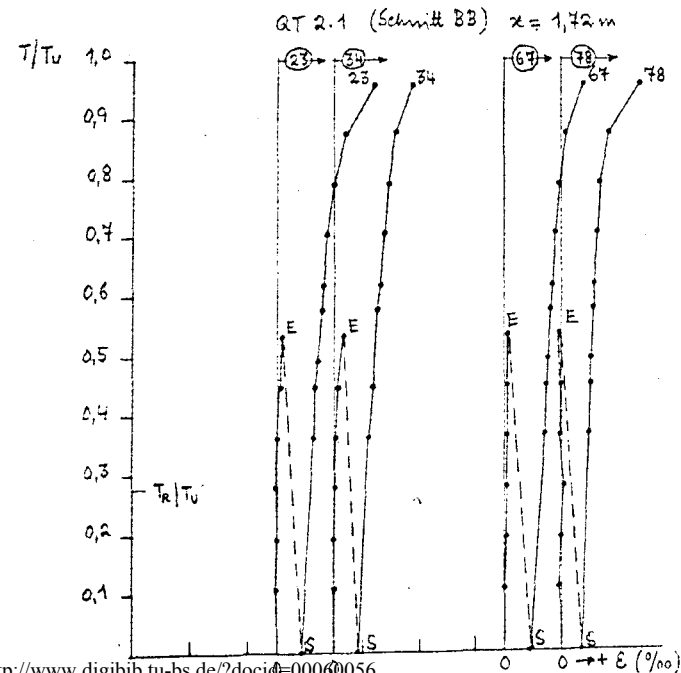
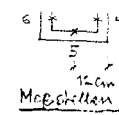
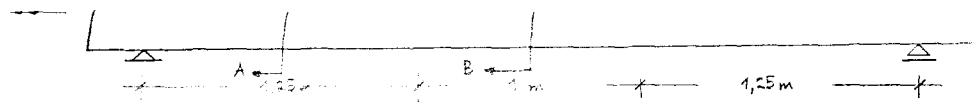
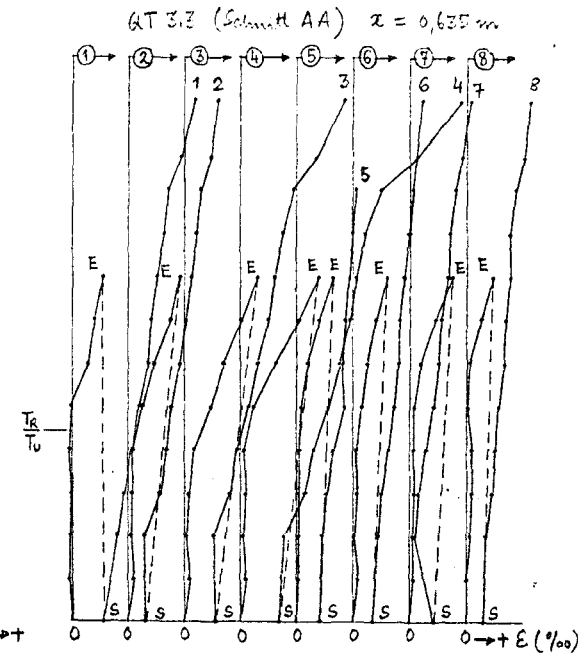
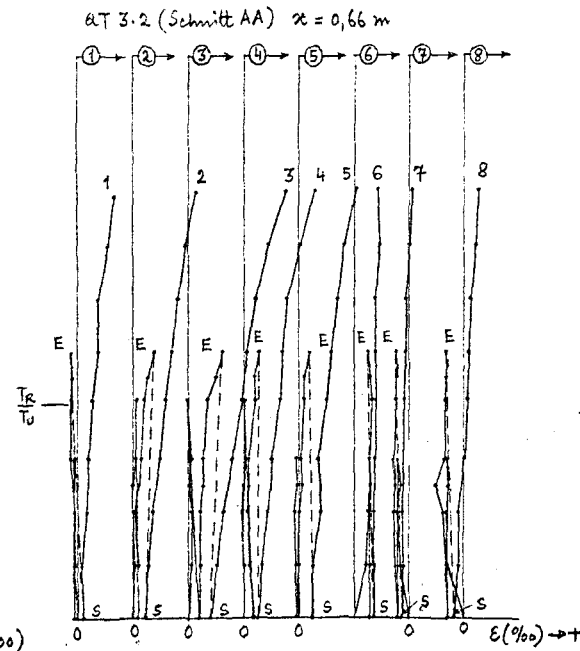
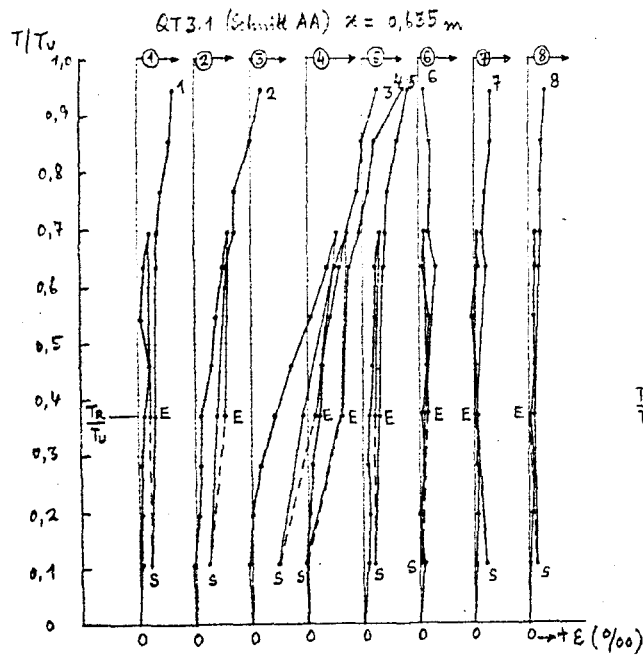


BILD 64.
Bügeldehnungen der
Balken QT 2.1 bis 2.3
Maßstab für ϵ
0 1 2 ‰



5 Anfang des größten
Schwundbelastung.

... nach dem



Maßstab für ϵ :
0 1 2 ‰

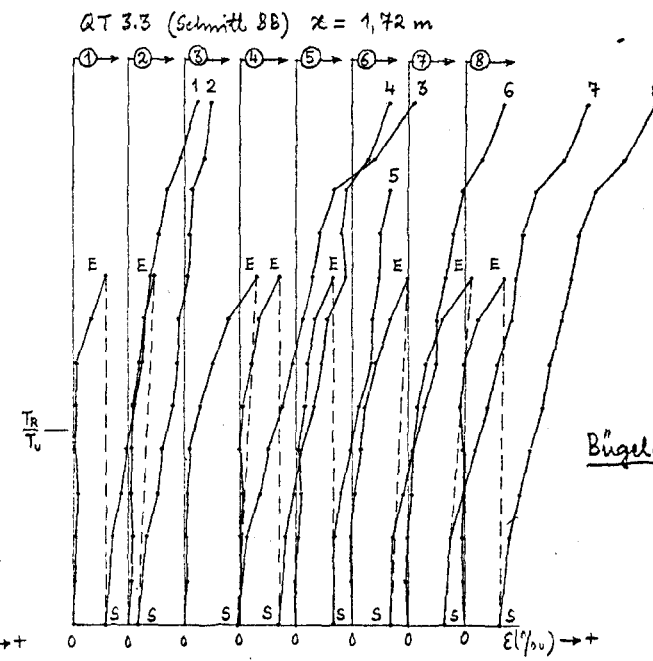
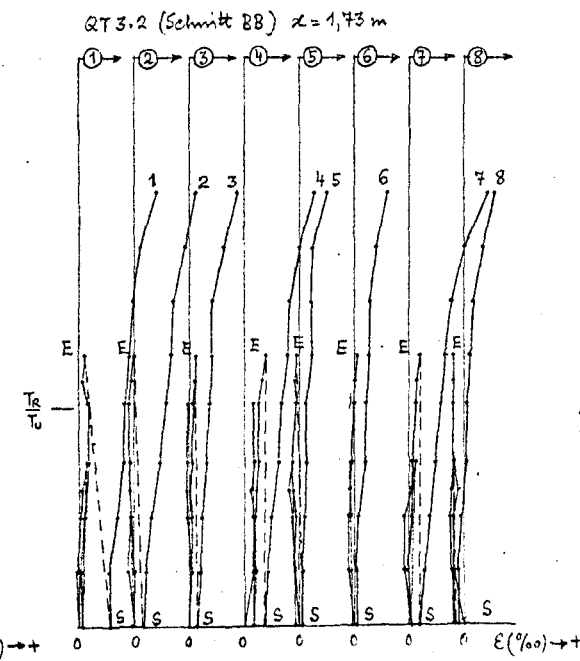
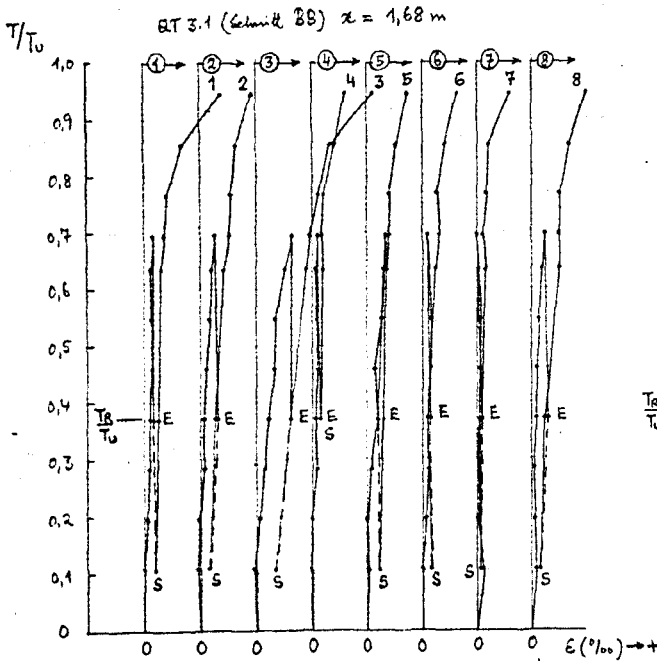
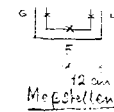
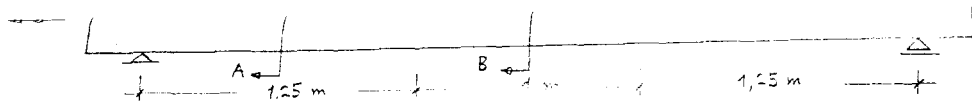
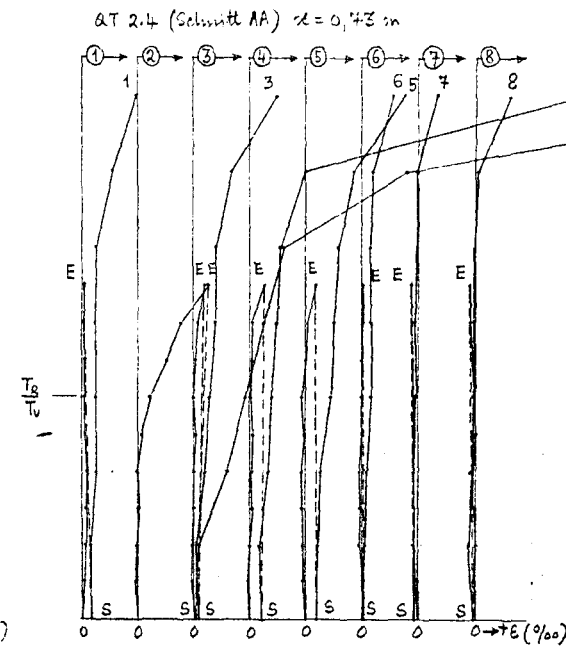
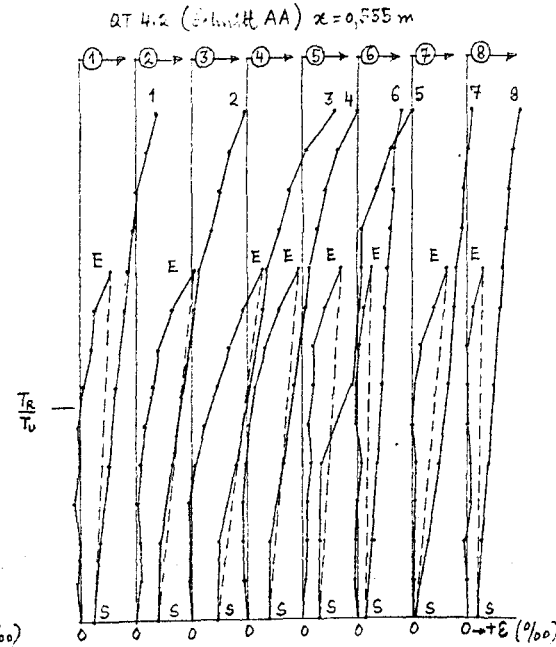
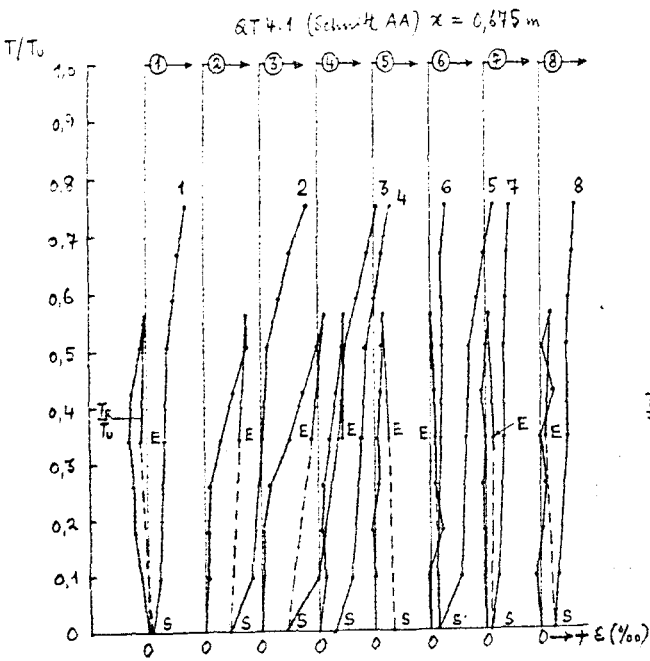


Bild 65.
Bügeldehnungen der Balken QT 3.1, 3.2 u. 3.3

Maßstab für ϵ :
0 1 2 ‰



S Anfang des zweiten statischen Belastungszyklus nach der Schnellbelastung.



Maßstab für E
0 1 2 ‰

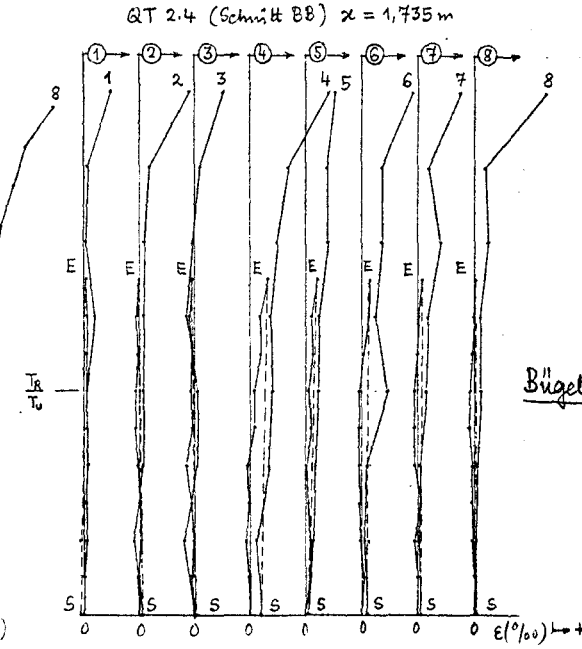
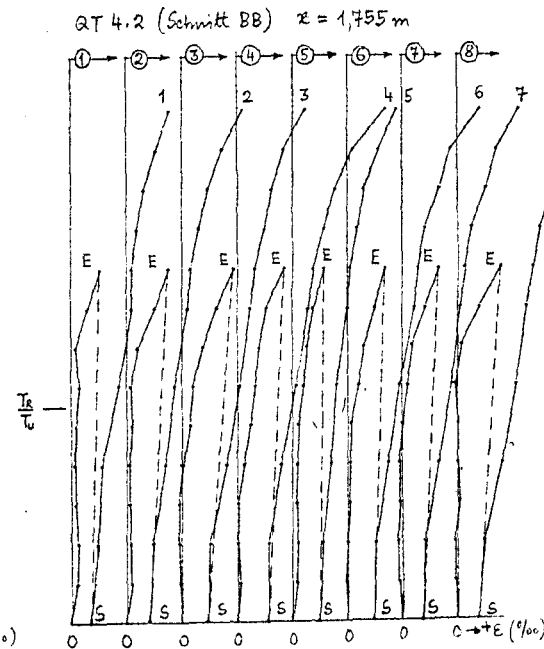
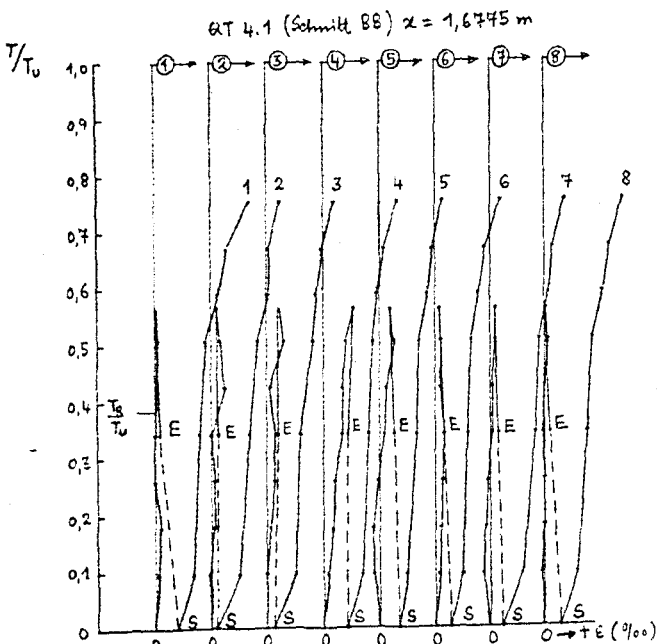


Bild 66.

Bügeldehnungen der Balken QT 4.1, 4.2 u. 2.4

Maßstab für E
0 1 2 ‰

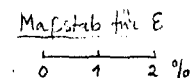
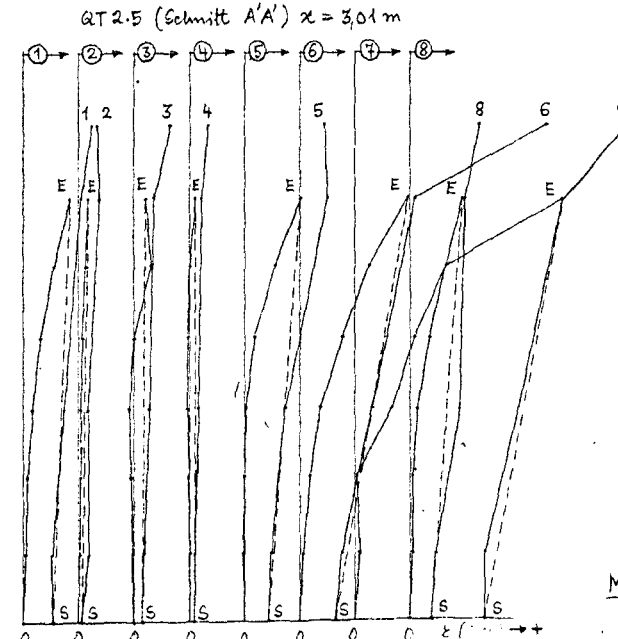
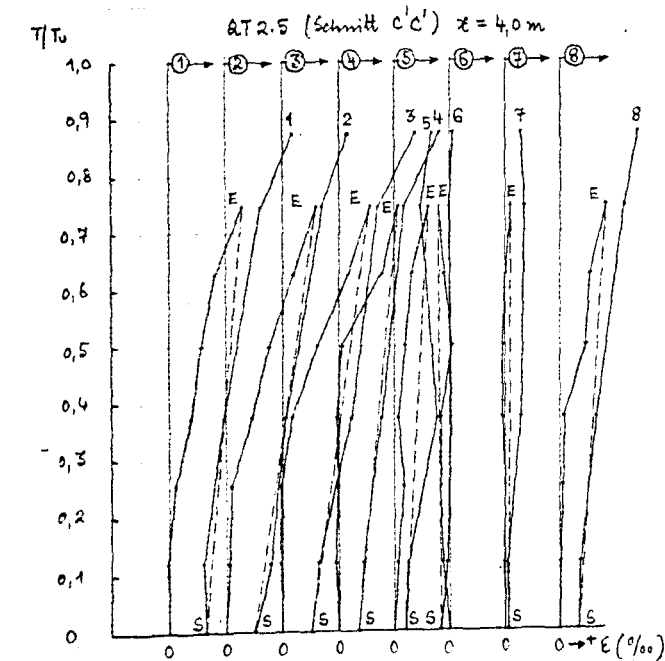
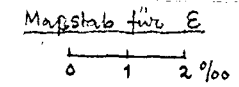
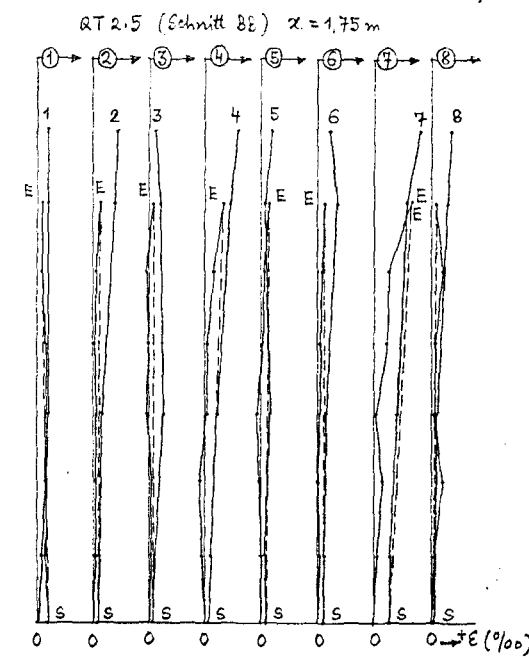
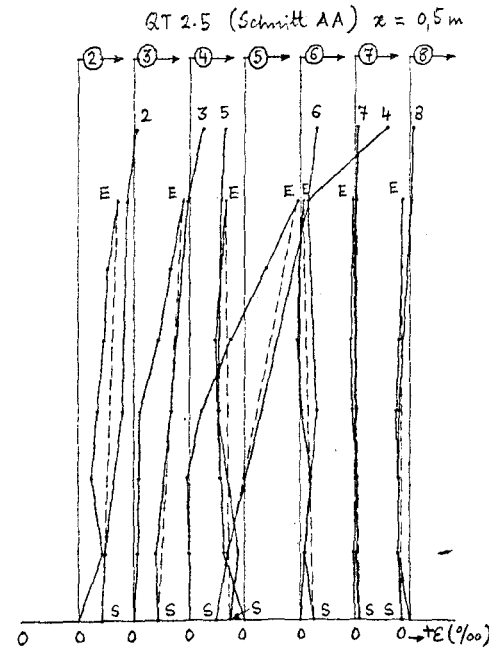
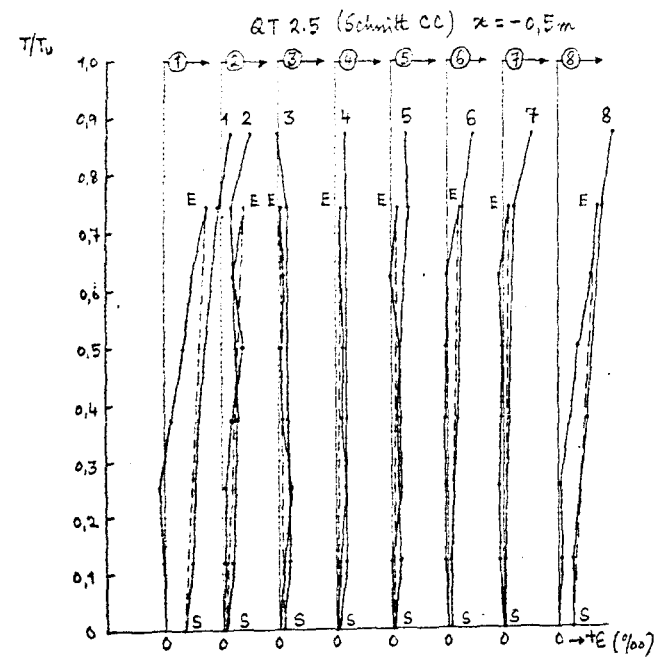
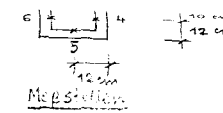
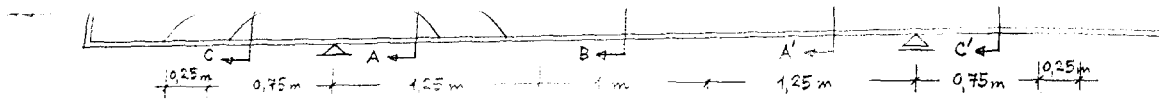
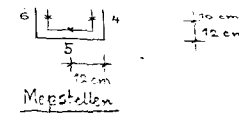
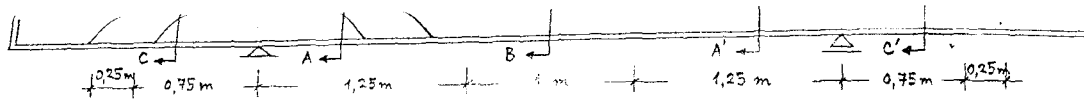


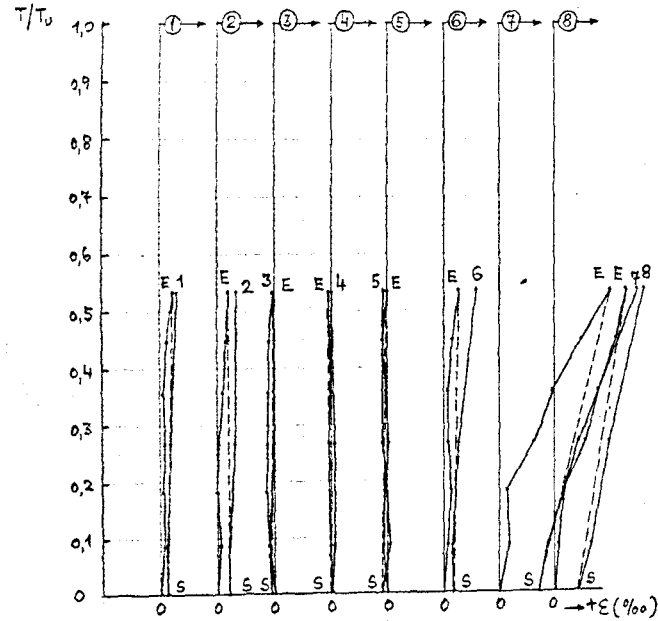
BILD 67: Engdehnungen des Balkens QT 2.5

E Ende des ersten statischen Belastungsganges
S Anfang des zweiten statischen Belastungsganges nach der Schnellbelastung.

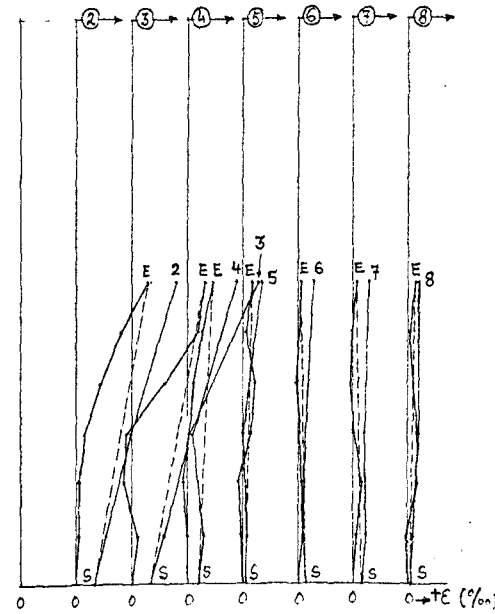
$T_u = 2.25 \text{ Mpm}$ (1. Bruch)



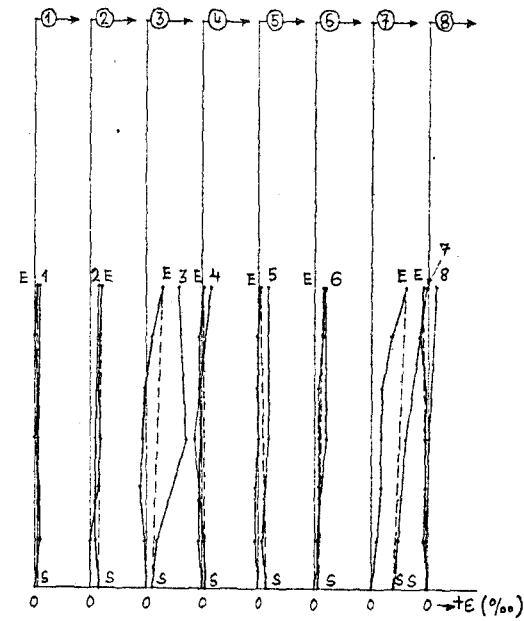
QT 2.6 (Schnitt CC) $x = -0,5 \text{ m}$



QT 2.6 (Schnitt AA) $x = 0,5 \text{ m}$

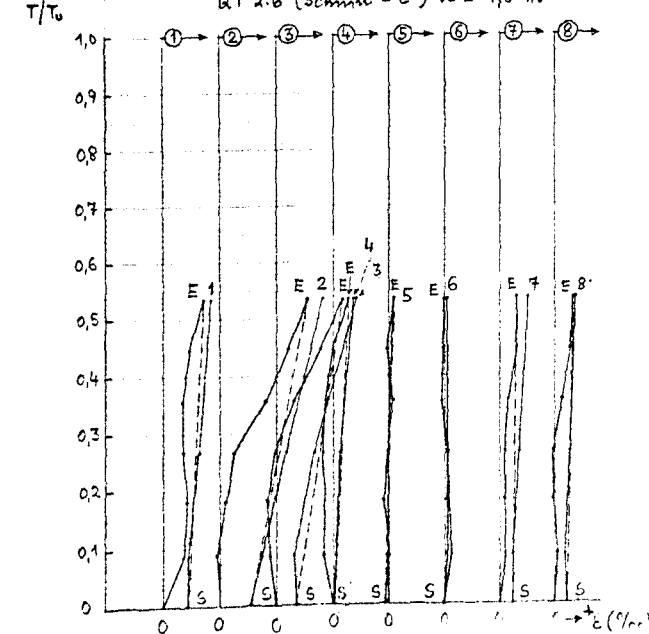


QT 2.6 (Schnitt BB) $x = 1,75 \text{ m}$



Maßstab für ϵ
0 1 2 ‰

QT 2.6 (Schnitt C'C') $x = 4,0 \text{ m}$



QT 2.6 (Schnitt AA') $x = 3,01 \text{ m}$

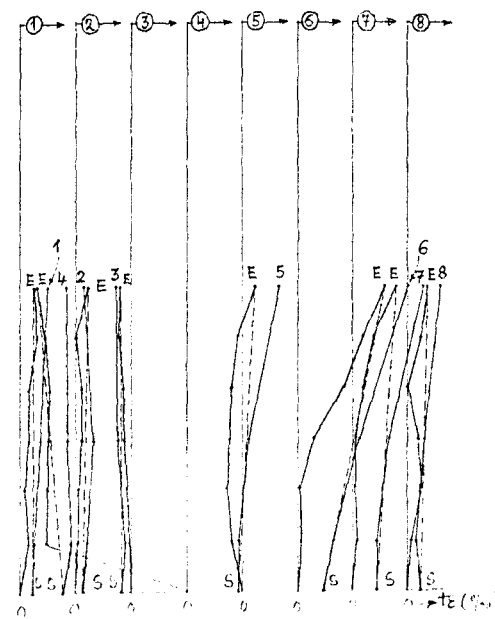
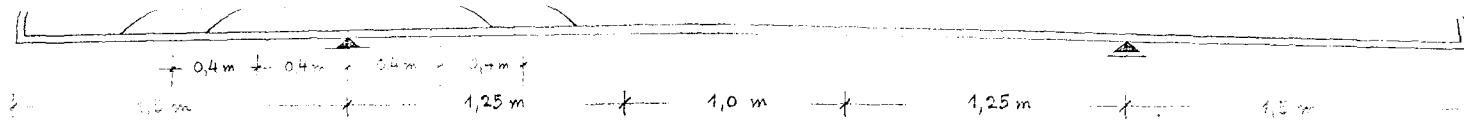


BILD 68. Bügeldehnungen des Balkens QT 2.6

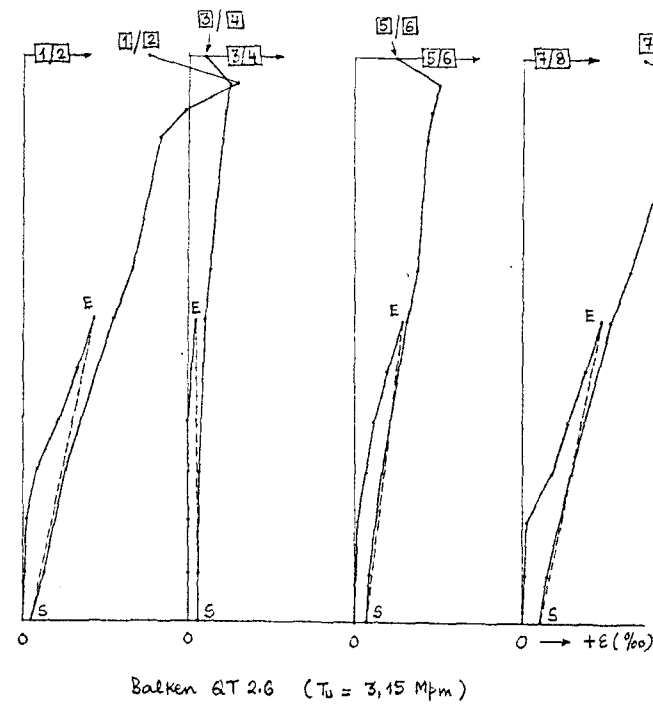
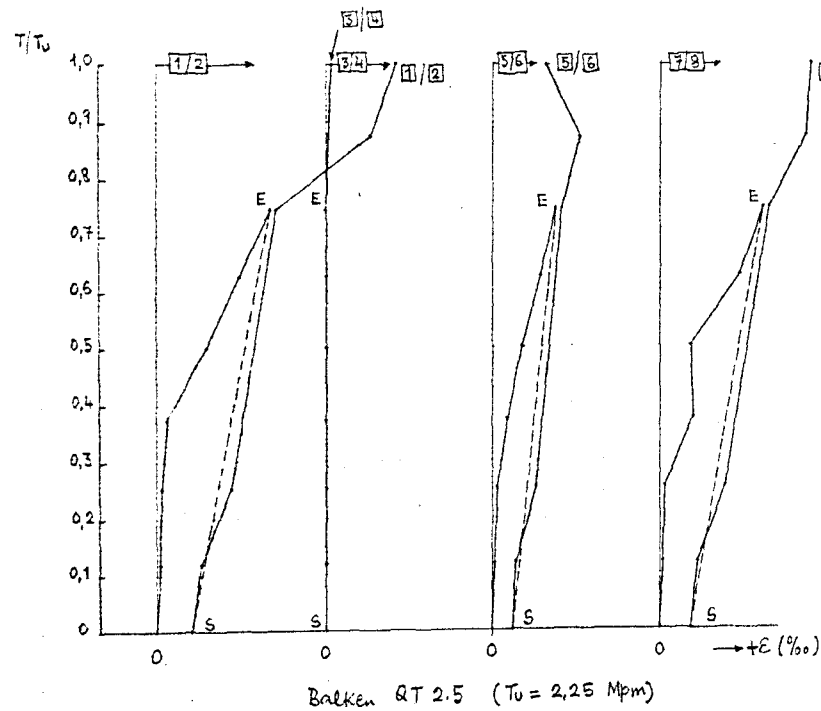
E Ende des ersten statischen Belastungsanges
S Anfang des zweiten statischen Belastungsanges nach
den Schwellbelastung.

$T_0 = 3,15 \text{ Mpm}$ (1. Bruch)

Maßstab für ϵ
0 1 2 ‰



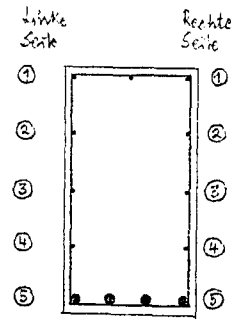
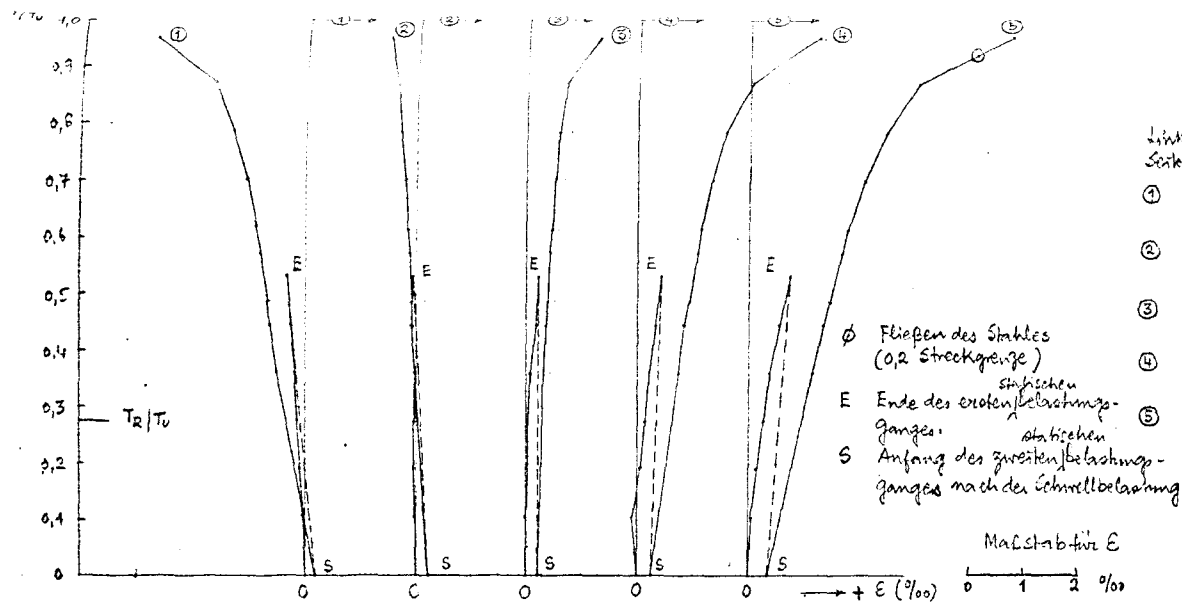
Aufgebogene
Eisen



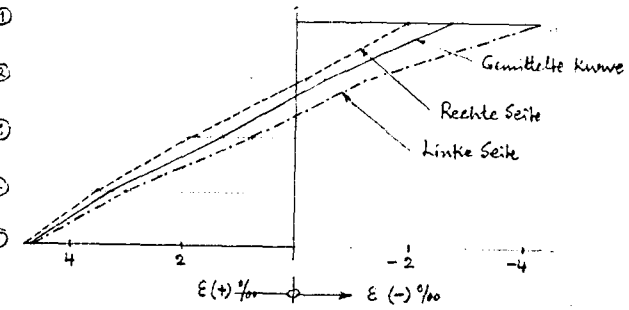
Maßstab für E :
0 1 2 ‰

BILD 69. Stahldehnungen in den aufgebogenen Eisen
der Balken QT 2.5 und QT 2.6

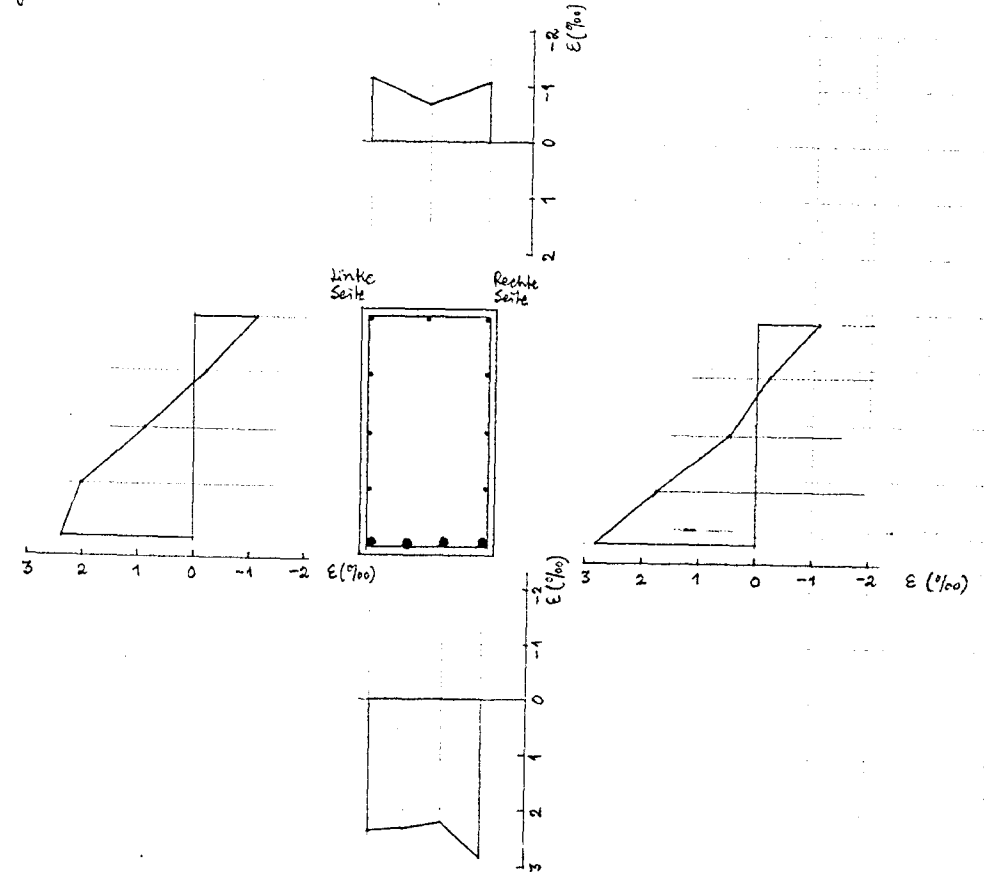
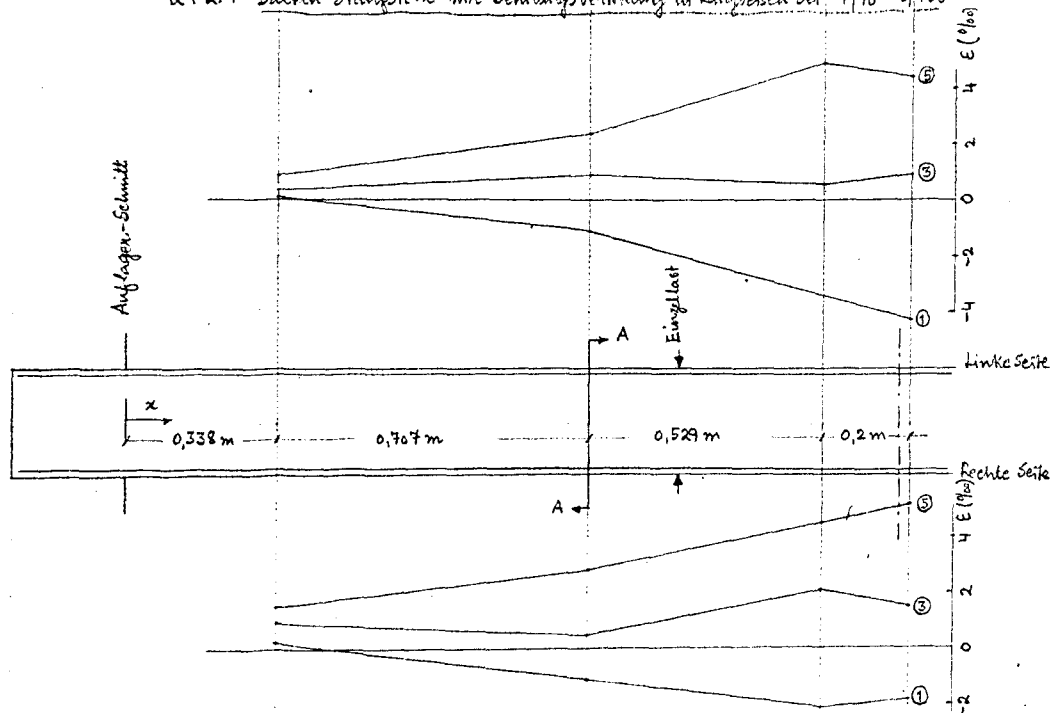
E Ende des ersten statischen Belastungsanges
S Anfang des zweiten statischen Belastungsanges nach der Schwellbelastung
Dehnungswerte gemittelt aus zwei Dehnmessstreifen an einer Stelle.



Dehnungsverteilung im querkraftfreien Bereich bei $T/T_U = 0,958$

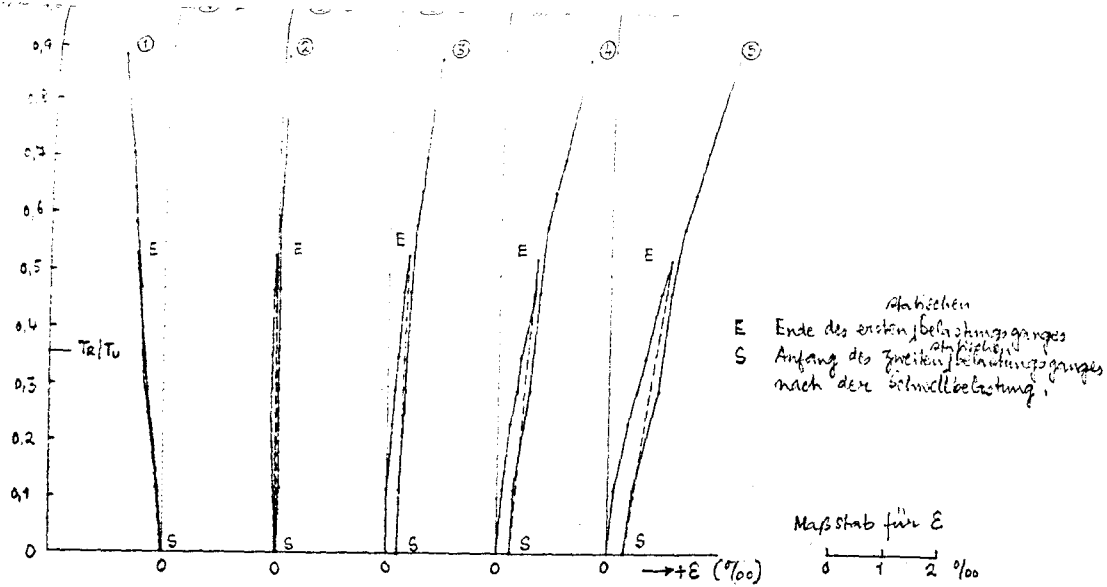


GT 2.1 Balken-Draufsicht mit Dehnungsverteilung in Längsrißen bei $T/T_U = 0,958$



Dehnungsverteilung in Längsrißen im Schnitt AA bei $T/T_U = 0,958$

Bild 70. Dehnungen in Längsbewehrung bei Balken GT 2.1



QT 2.2 Balken-Draufsicht mit Dehnungsverteilung in Längsrich bei $T/T_0 = 0,882$

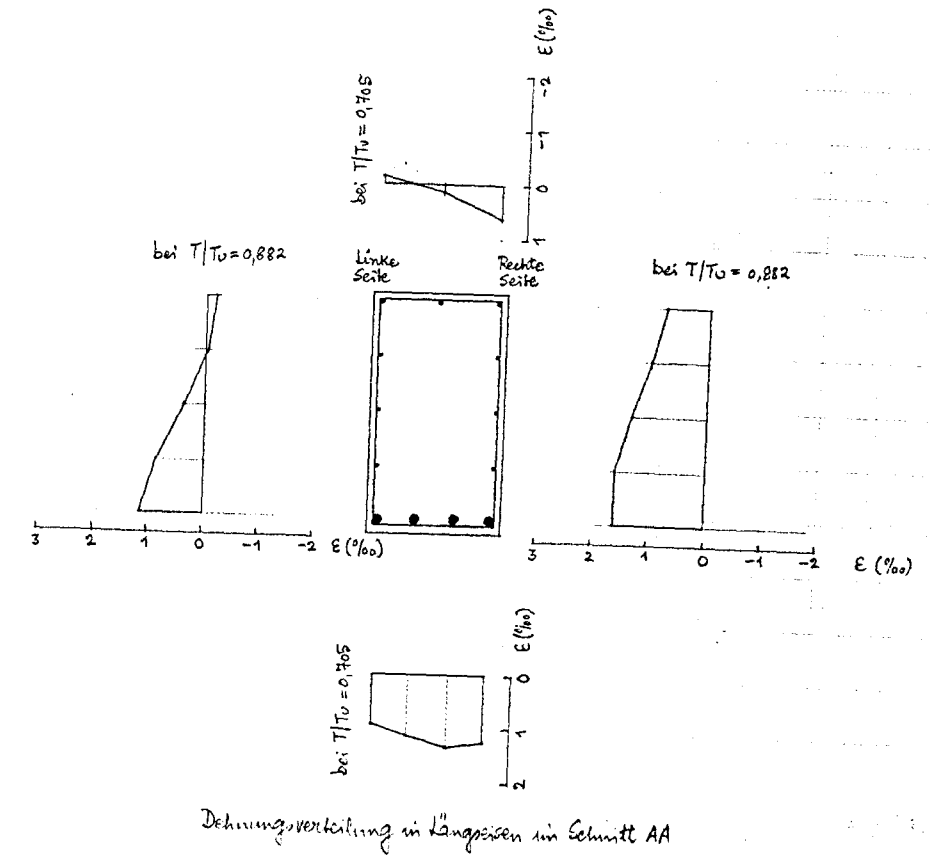
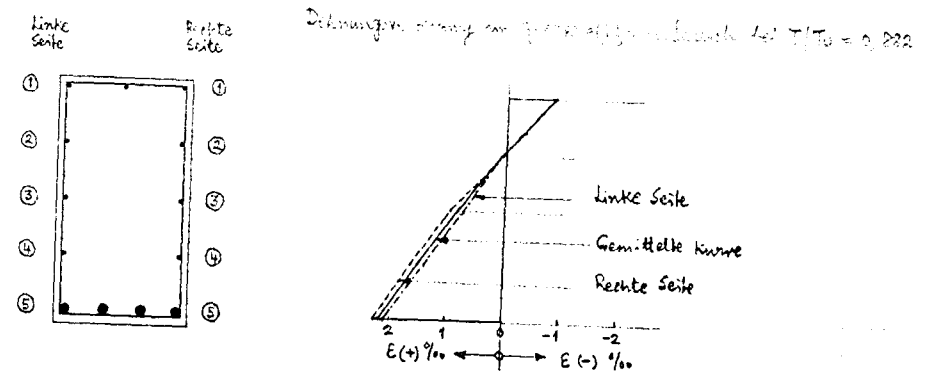
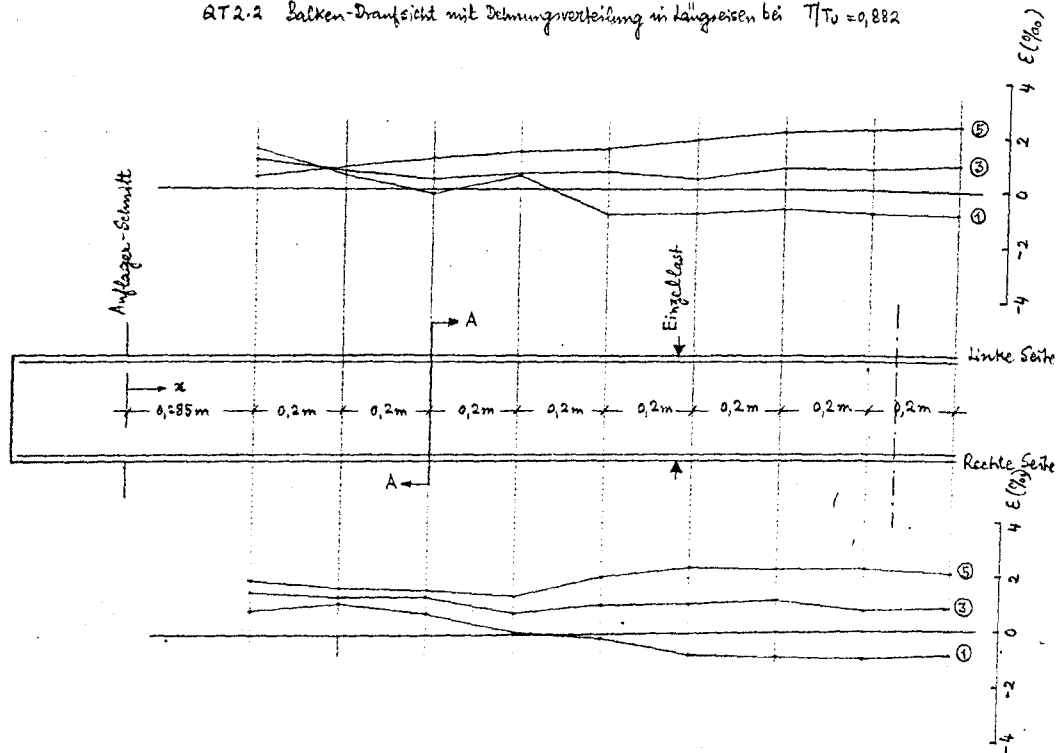
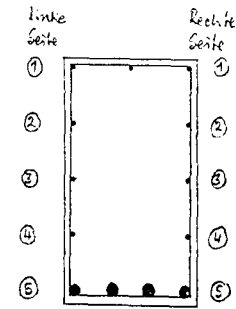
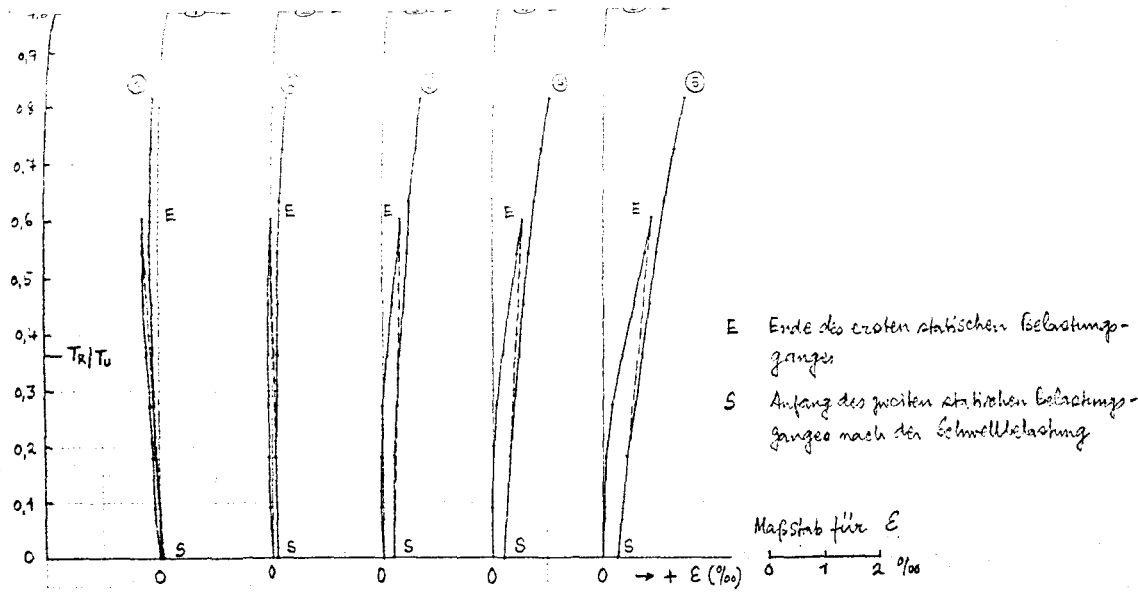
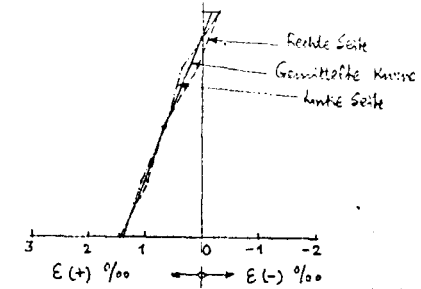


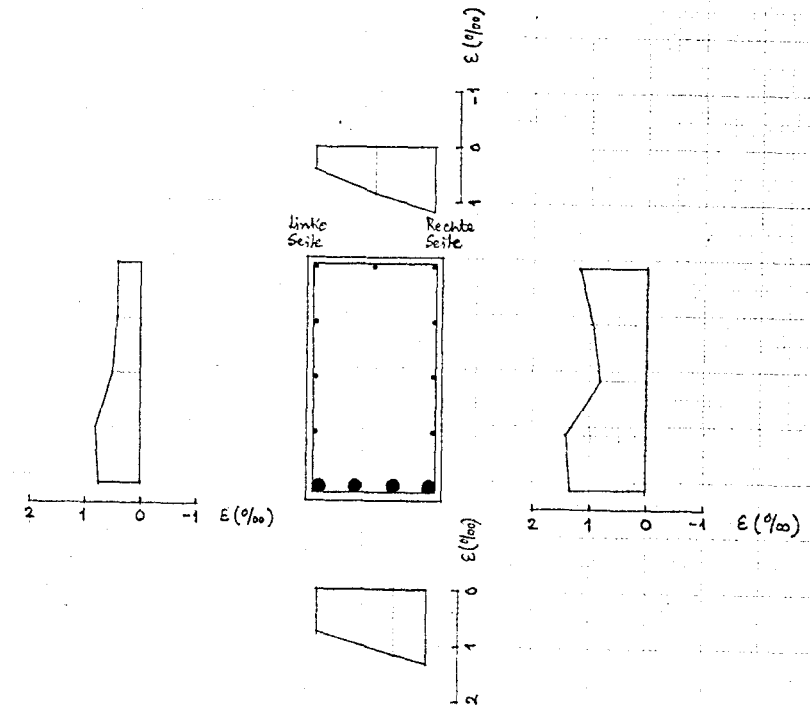
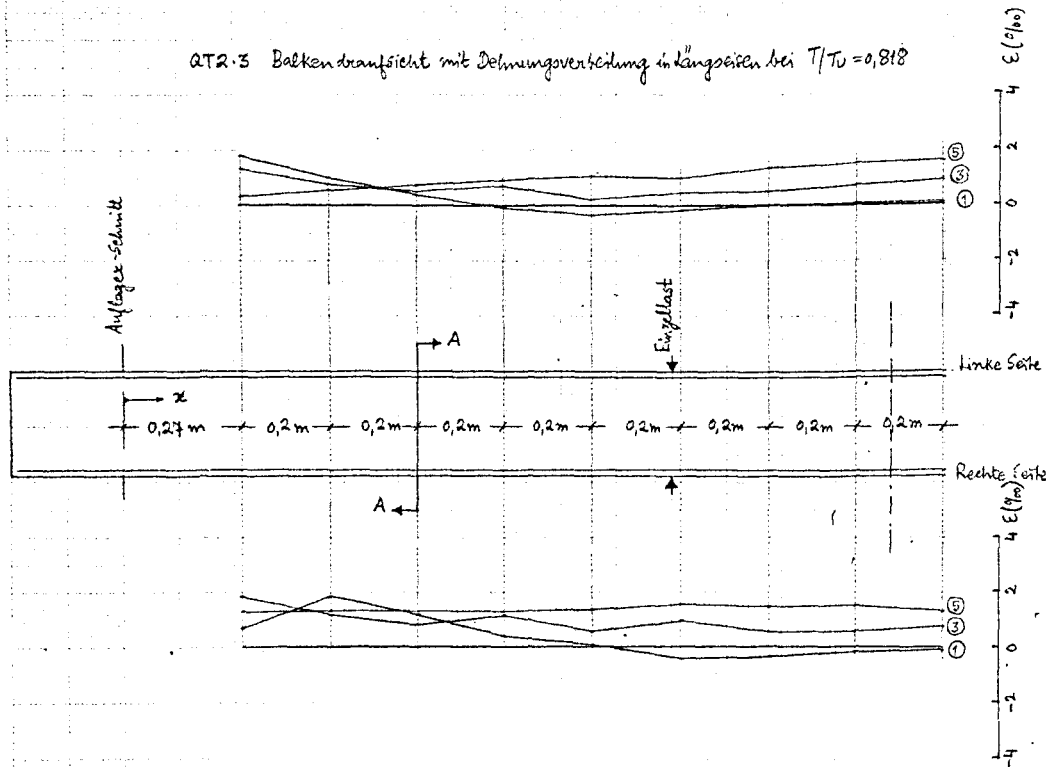
Bild 41. Dehnungen in Längsbewehrung bei Balken QT 2.2



Dehnungsverteilung im Querschnittform bei $T/T_u = 0,818$

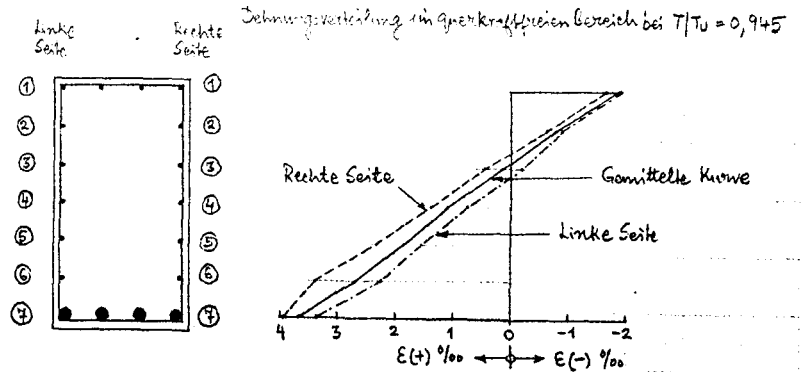
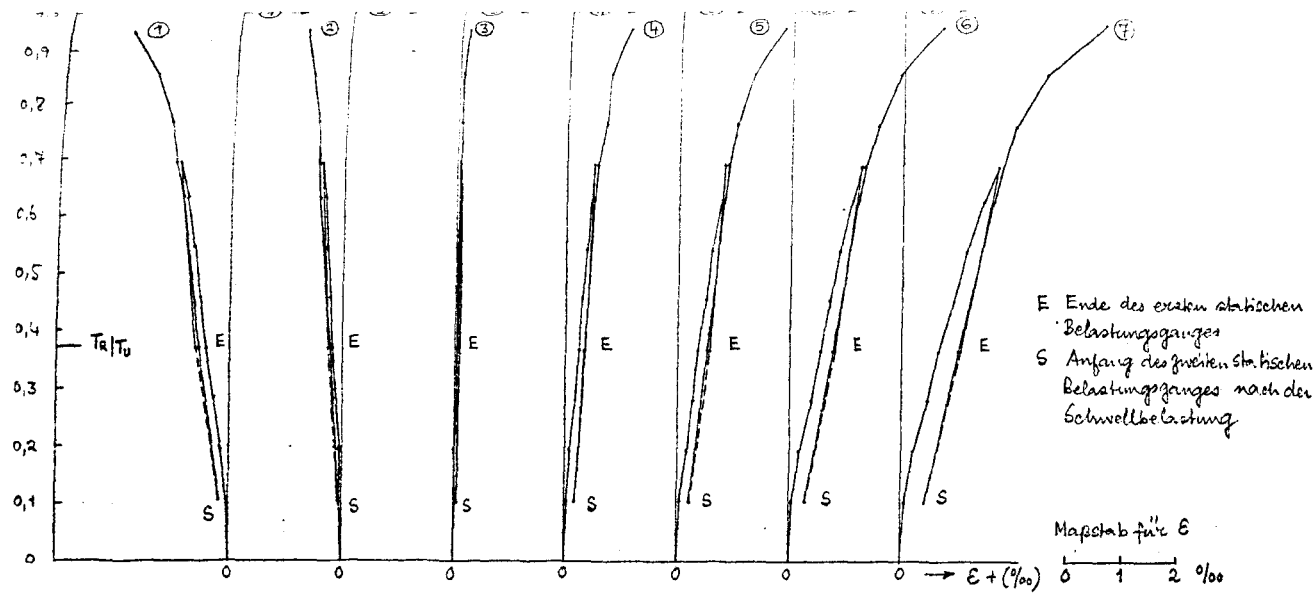


QT2.3 Balken Draufsicht mit Dehnungsverteilung in Längsrich bei $T/T_u = 0,818$

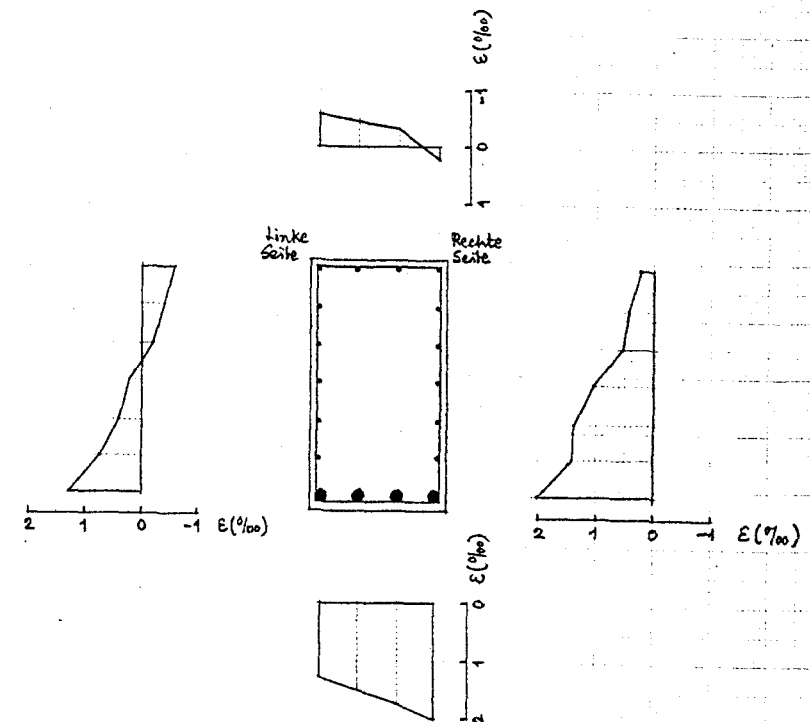
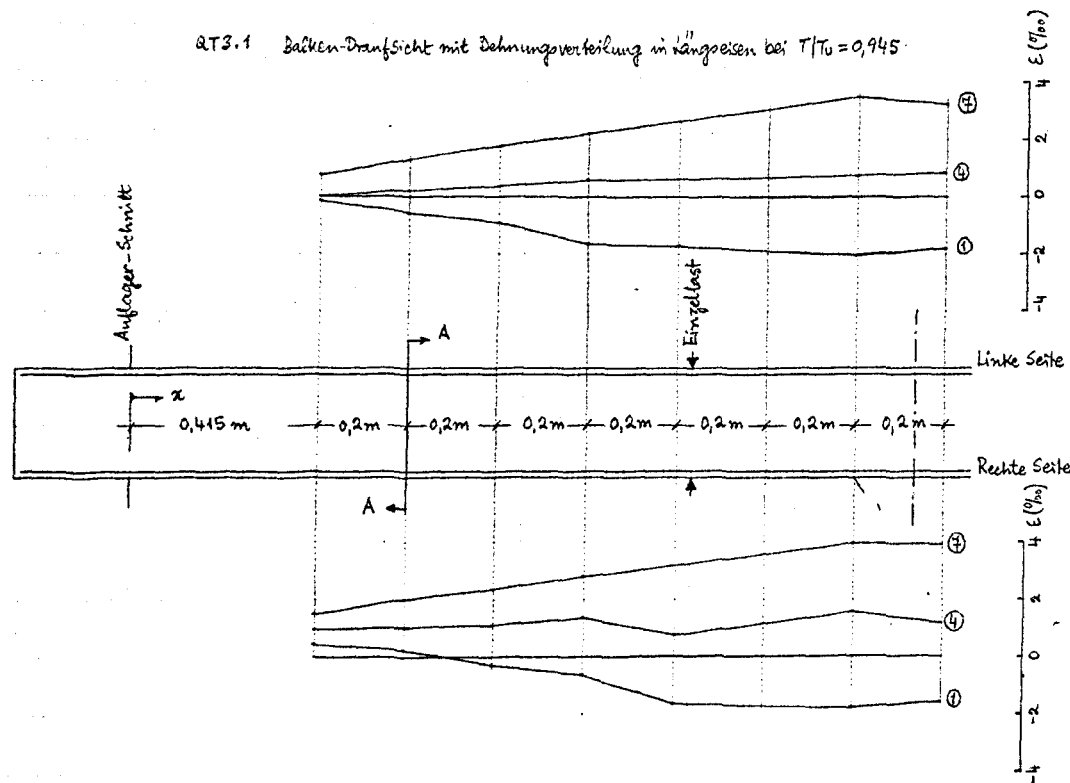


Dehnungsverteilung in Längsrich in Schnitt AA bei $T/T_u = 0,818$

Bild 72. Dehnungen der Längsbeziehung bei Balken QT2.3

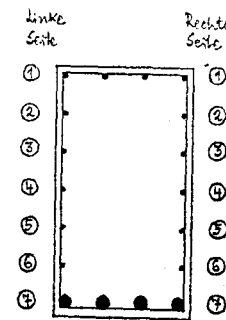
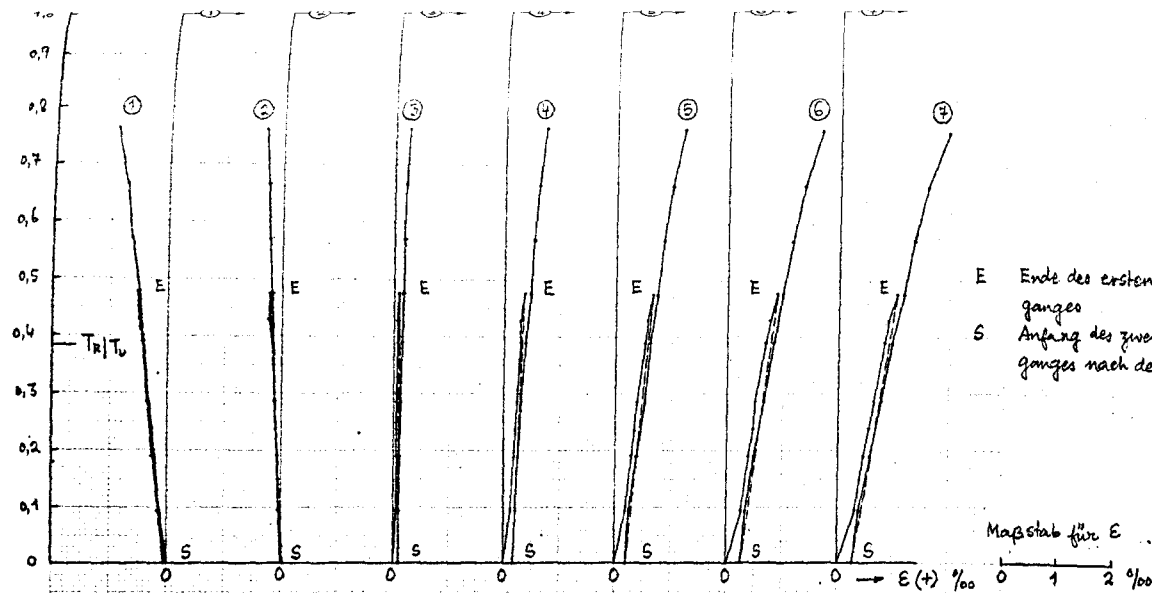


QT3.1 Balken-Draufsicht mit Dehnungsverteilung in Längseisen bei $T/T_0 = 0,945$

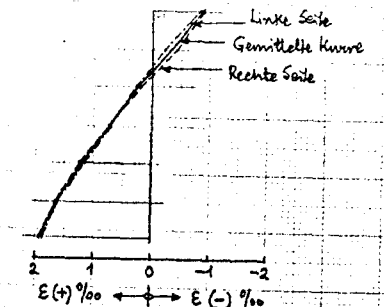


Dehnungsverteilung in Längseisen in Schnitt AA bei $T/T_0 = 0,945$

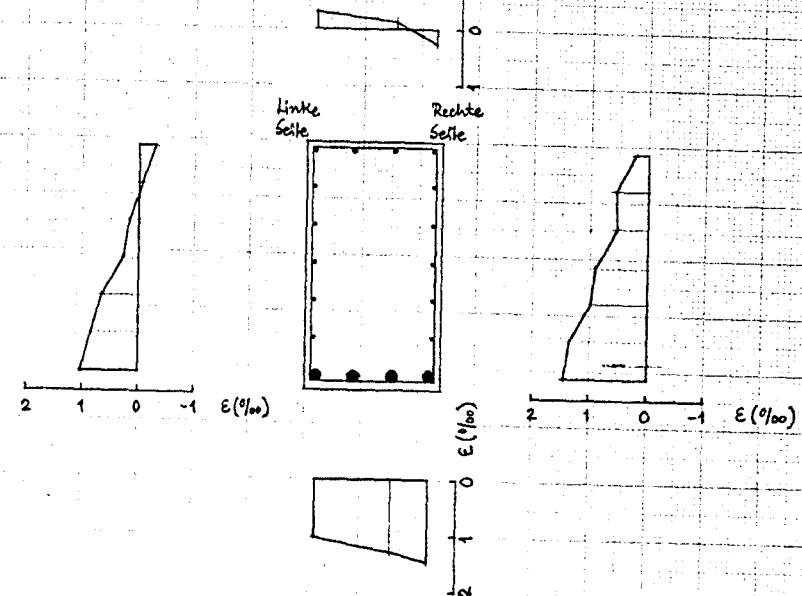
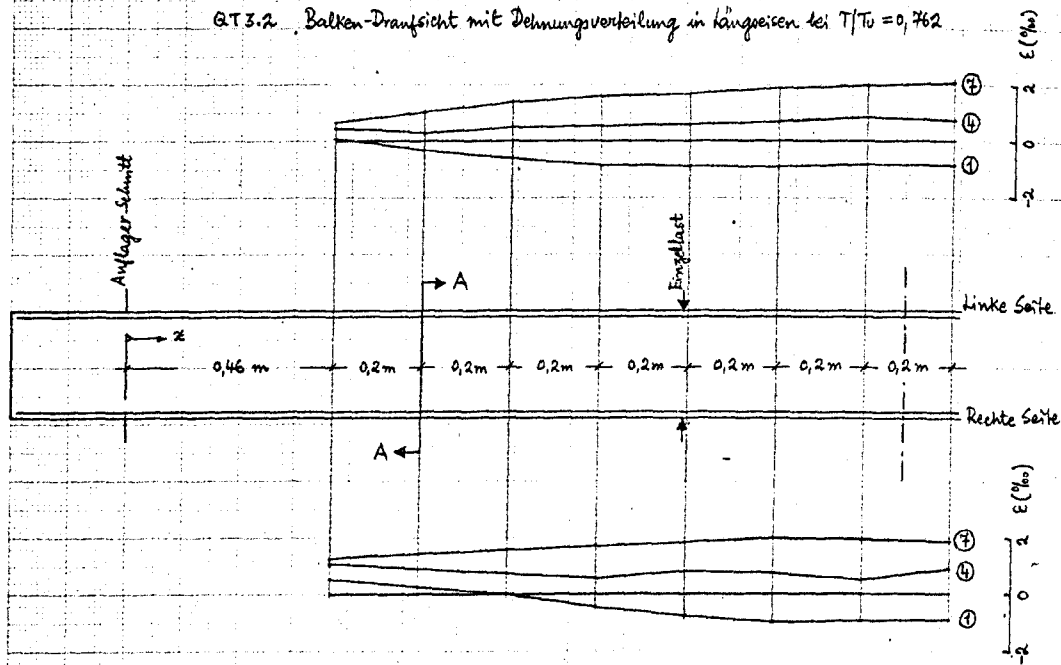
Bild 73. Dehnungen der Längseisen bei Balken QT 3.1



Dehnungsverteilung im Querschnittsbezirk bei $T/T_U = 0,762$

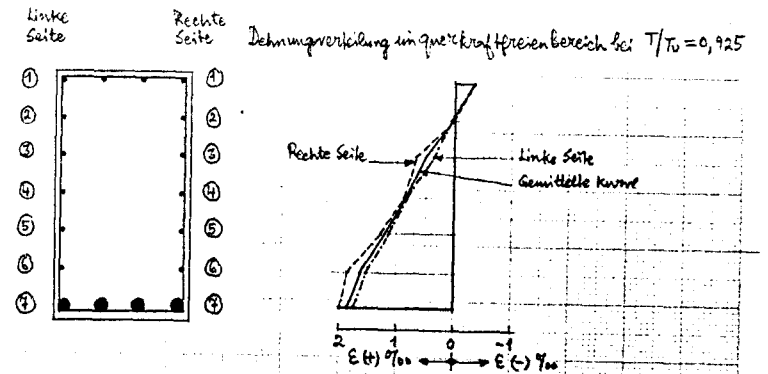
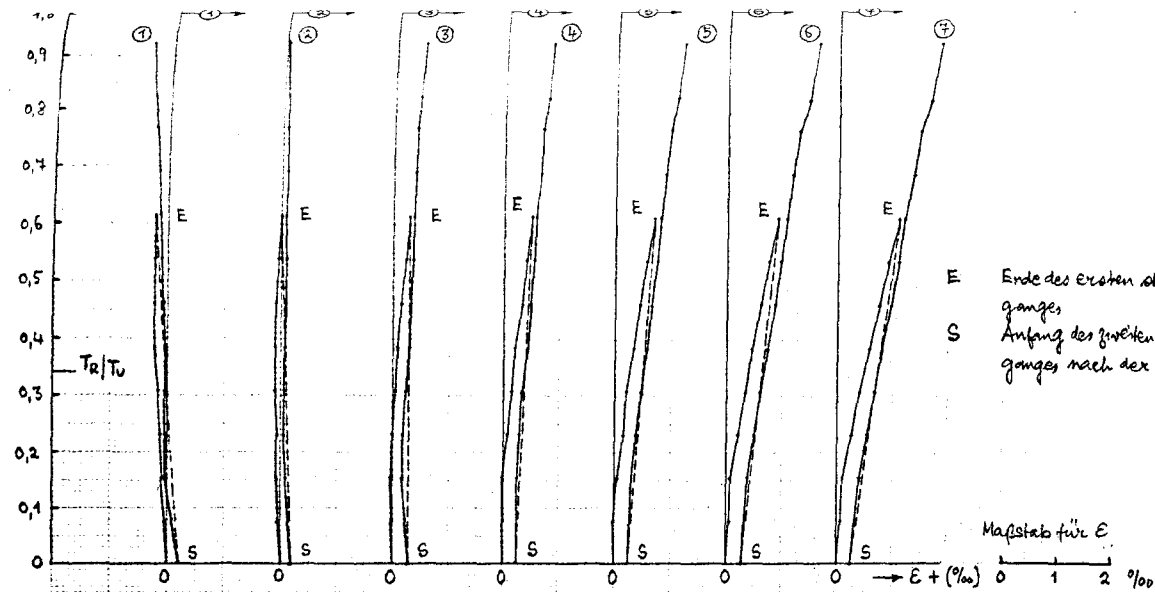


QT3.2 Balken-Draufsicht mit Dehnungsverteilung in Längsseiten bei $T/T_U = 0,762$

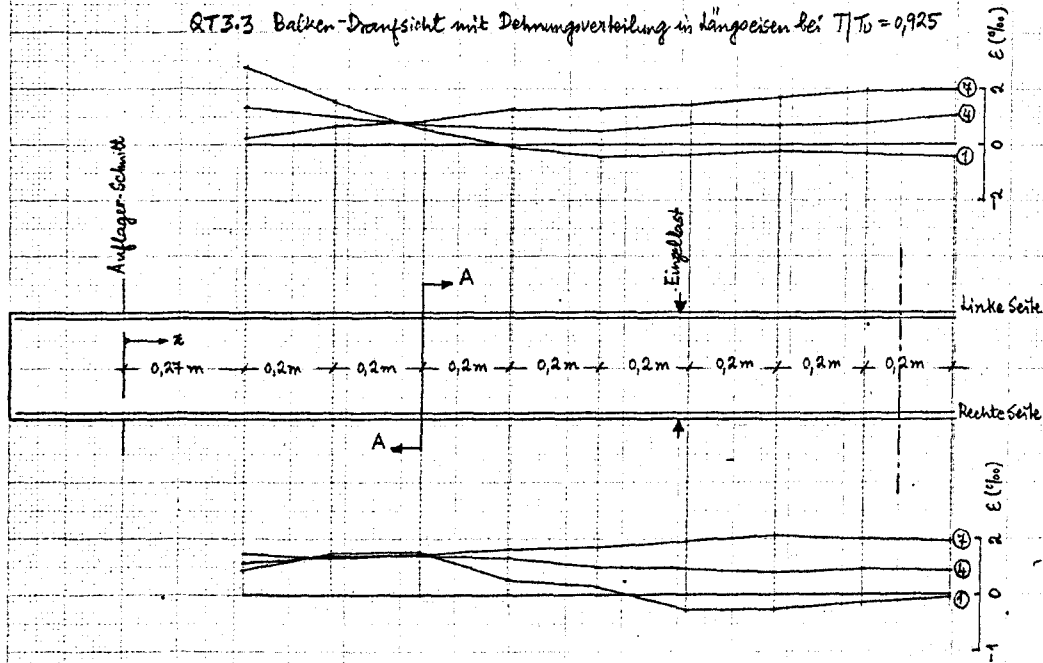


Dehnungsverteilung in Längsseiten im Schnitt AA bei $T/T_U = 0,762$

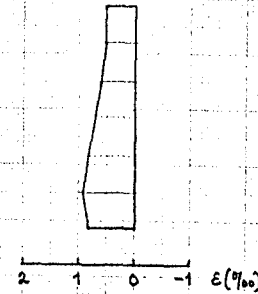
Bild 74. Dehnungen der Längsseiten bei Balken QT3.2



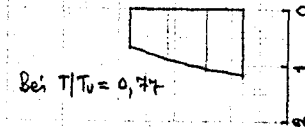
QT3.3 Balken-Draufsicht mit Dehnungsverteilung in Längsseiten bei $T/T_0 = 0.925$



Bei $T/T_0 = 0.925$

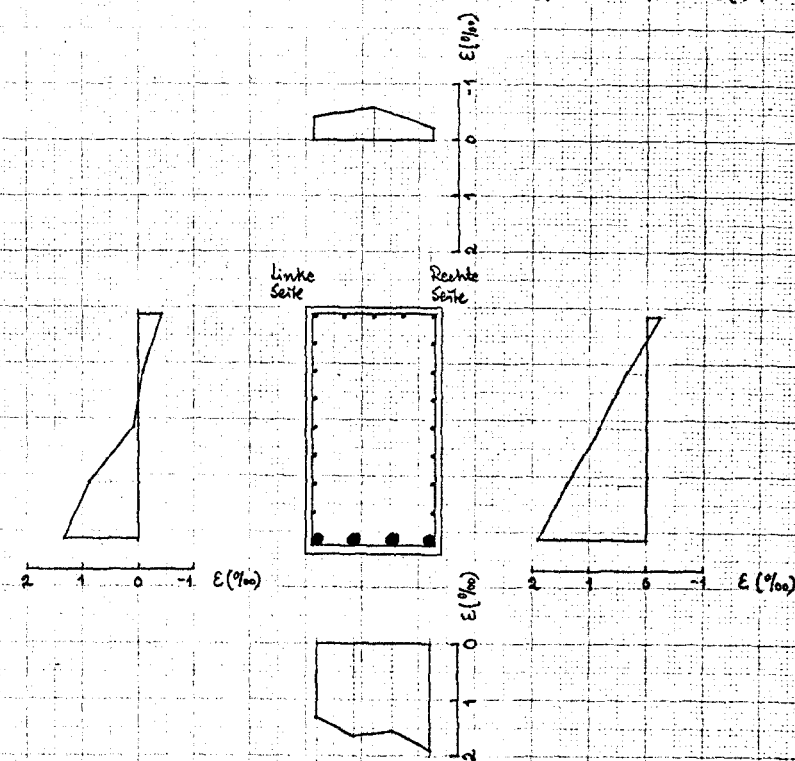
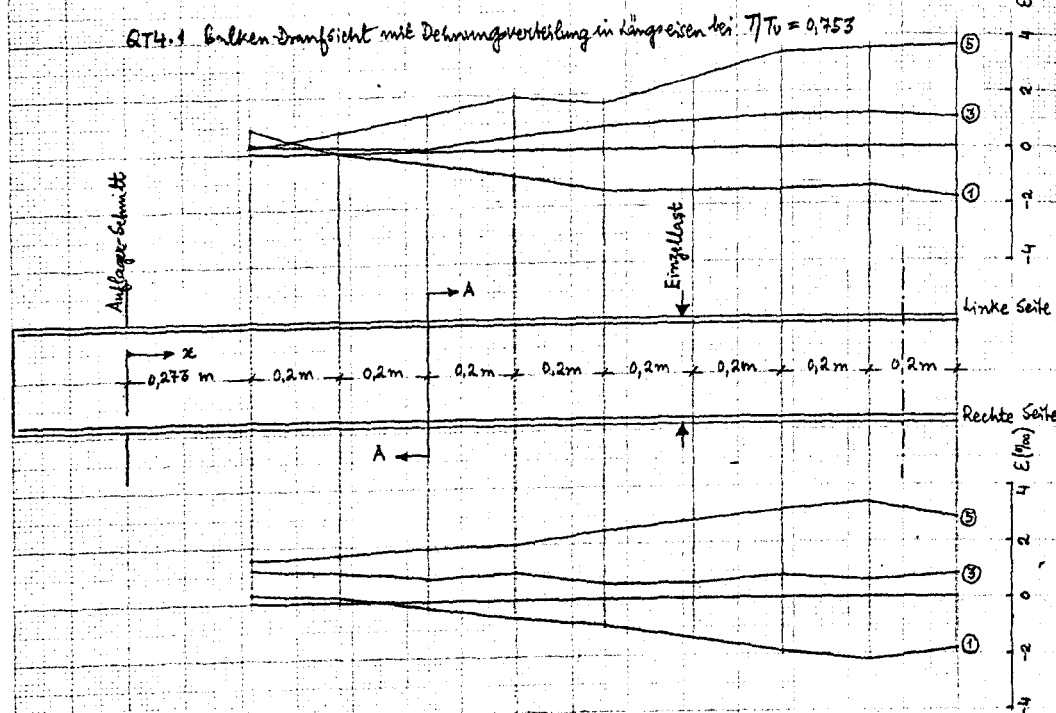
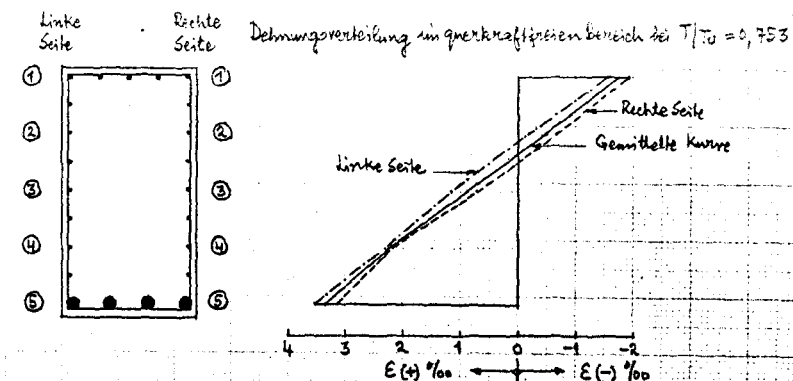
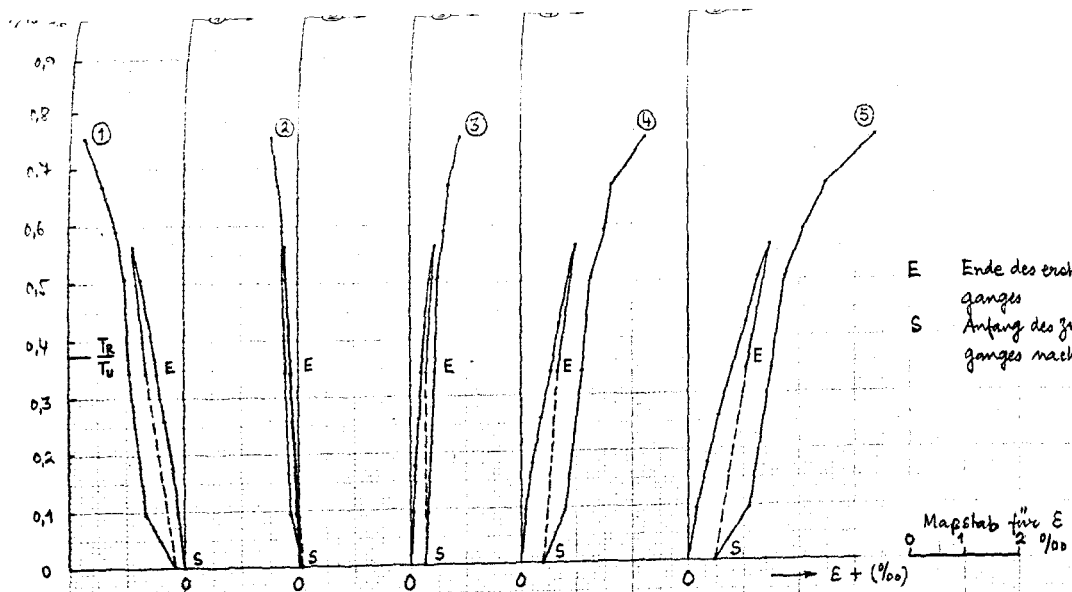


Bei $T/T_0 = 0.77$



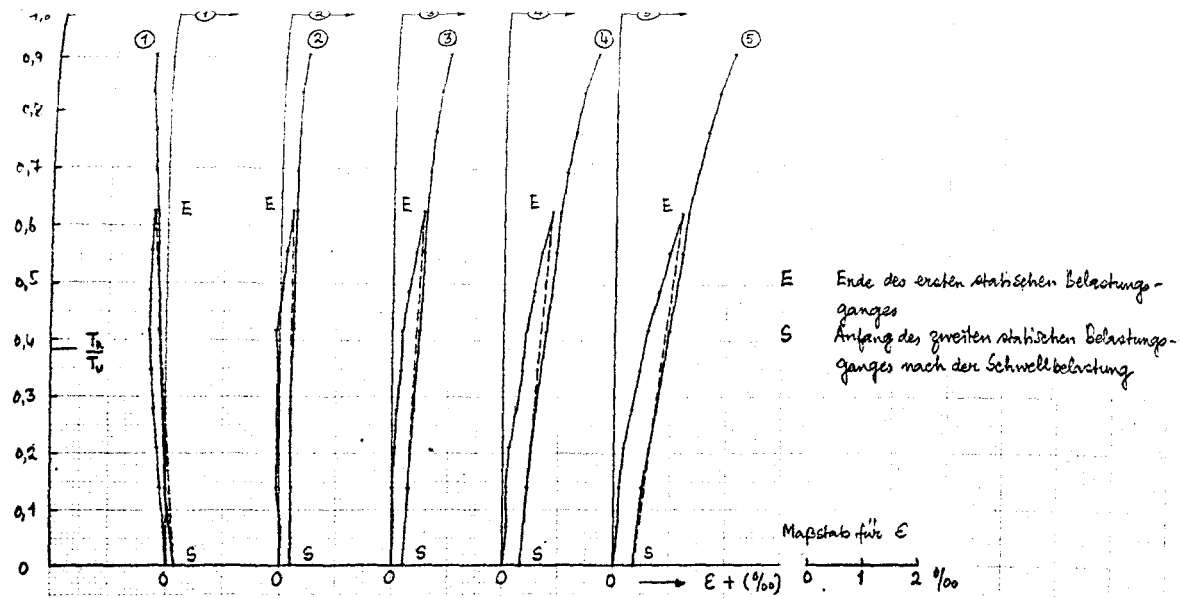
Dehnungsverteilung in Längsseiten im Schnitt AA

Bild 75. Dehnungen der Längsseiten bei Balken QT3.3

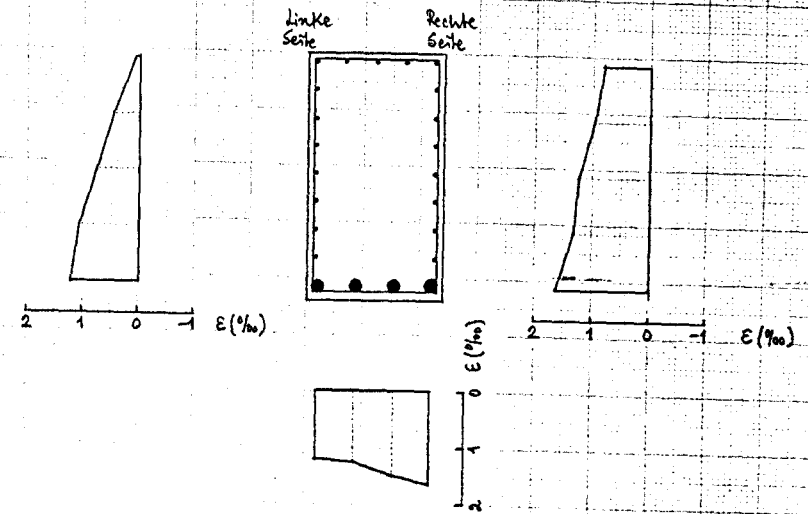
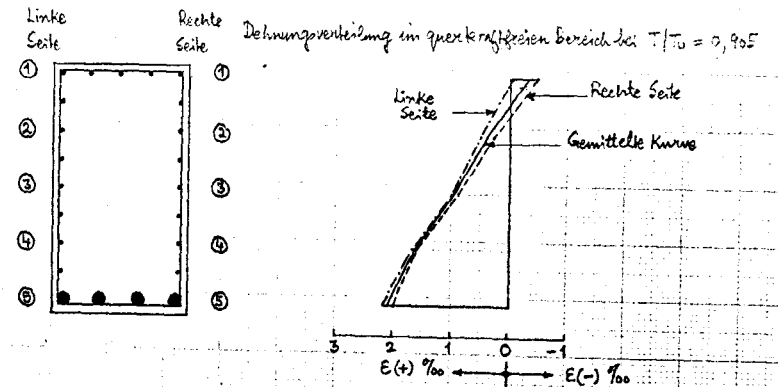
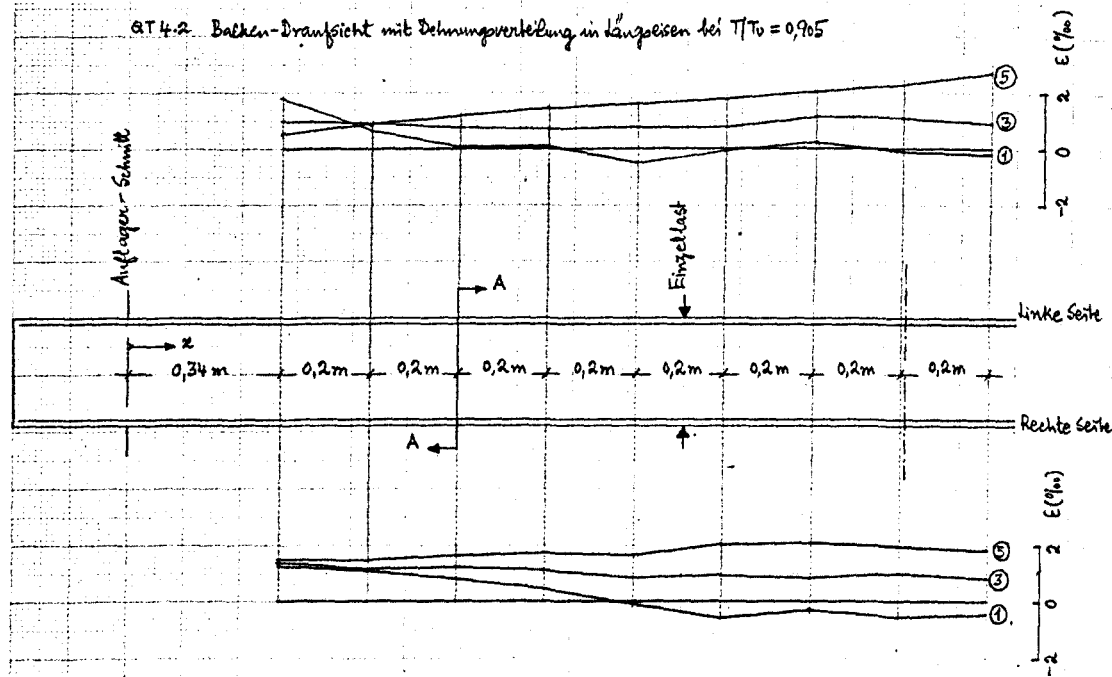


Dehnungsverteilung in Längsrichtung im Schnitt AA bei $T/T_0 = 0,753$

Bild 76. Dehnungen der Längsreifen bei Balken QT4.1

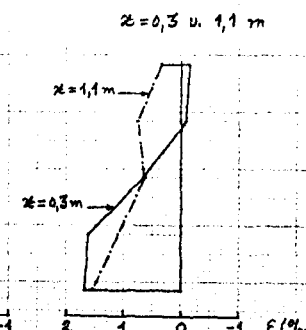
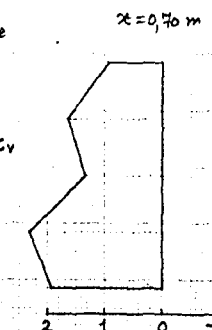
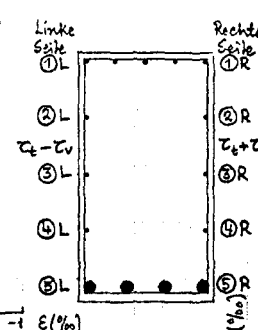
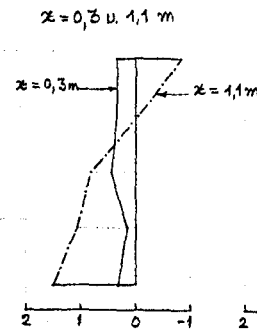
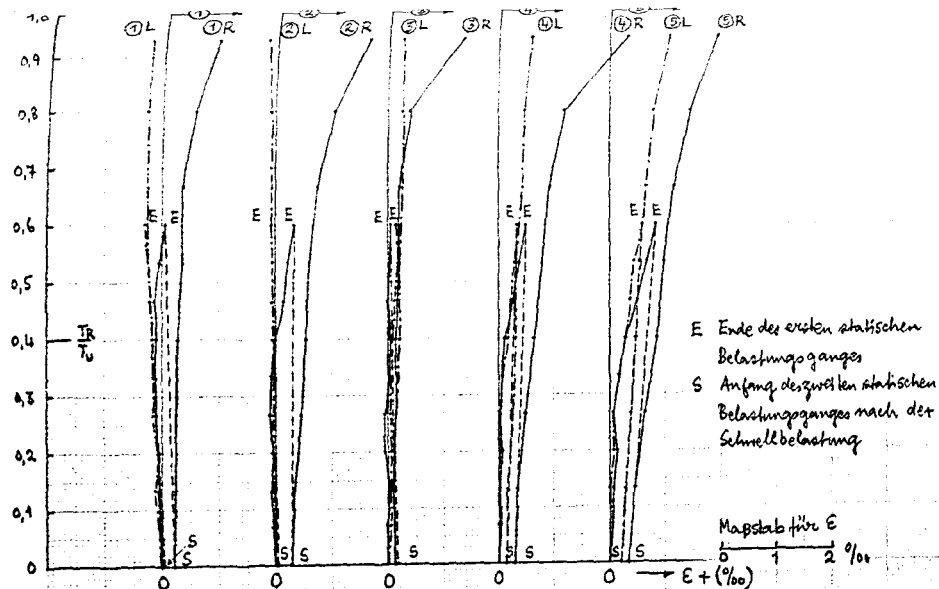


AT 4.2. Balken-Draufsicht mit Dehnungsverteilung in Längsseiten bei $T/T_u = 0,905$

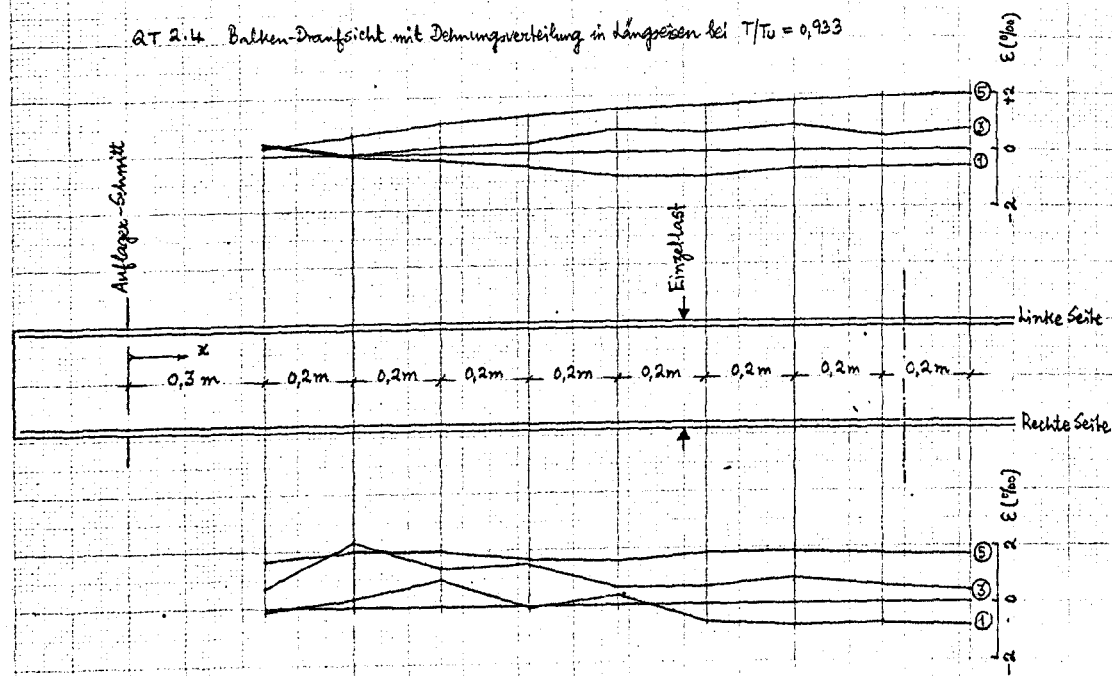


Dehnungsverteilung in Längsseiten im Schnitt AA bei $T/T_u = 0,905$

Bild 74. Dehnungen der Längsseiten bei Balken AT 4.2



AT 2.4 Balken-Draufsicht mit Dehnungsverteilung in Längsrich bei $T/T_u = 0,933$



Dehnungsverteilung im querkraftfreien Bereich bei $T/T_u = 0,933$

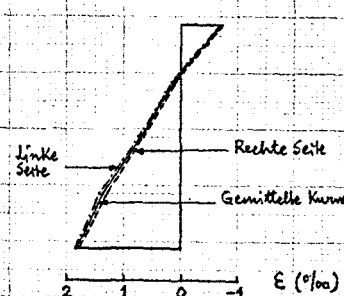
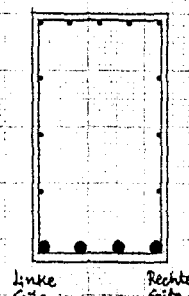
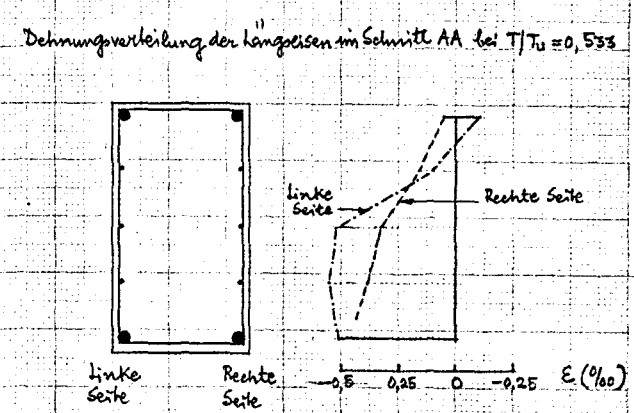
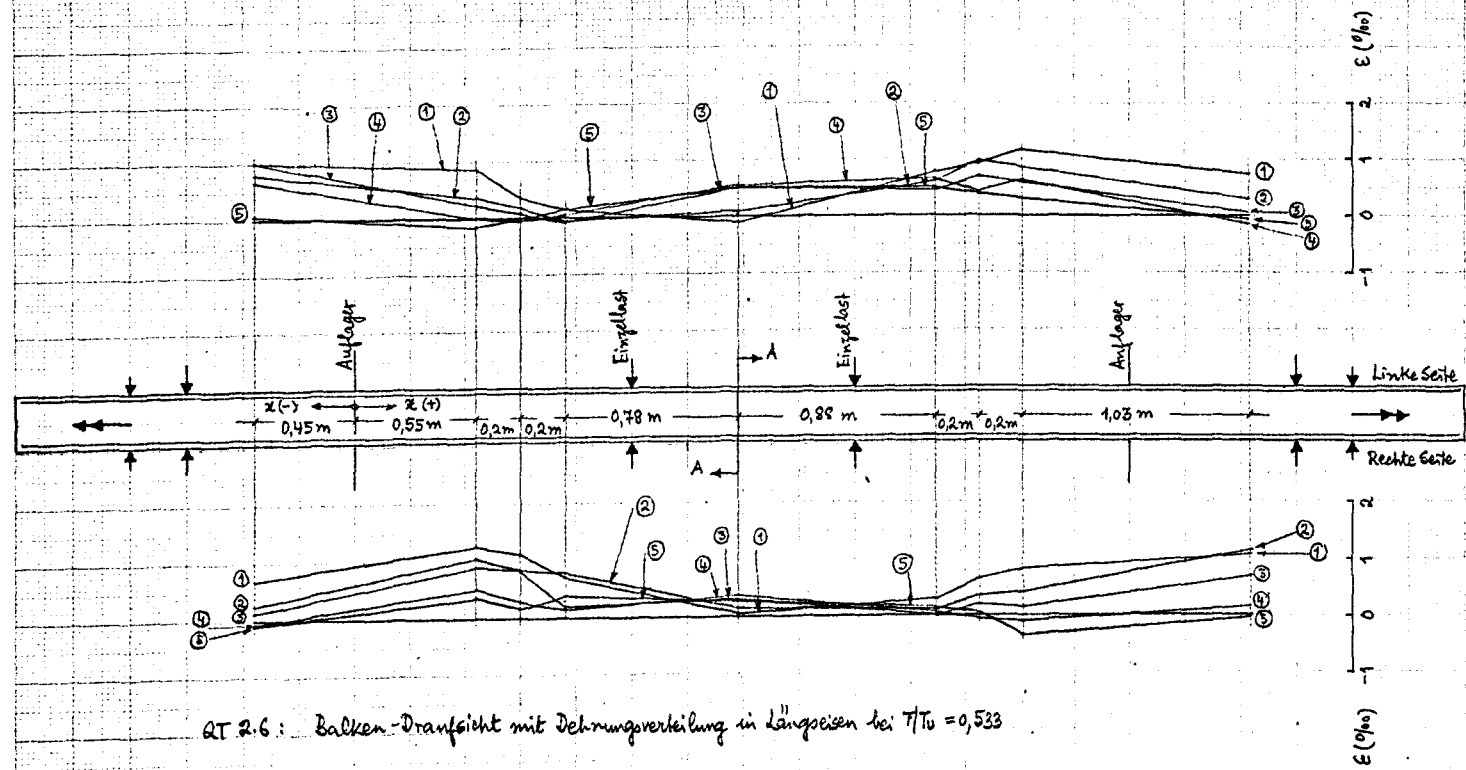
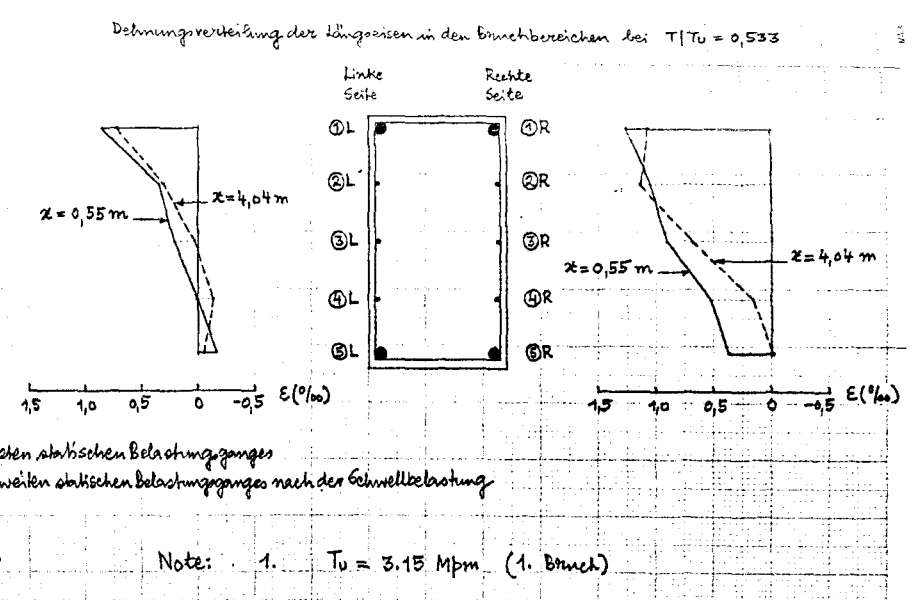
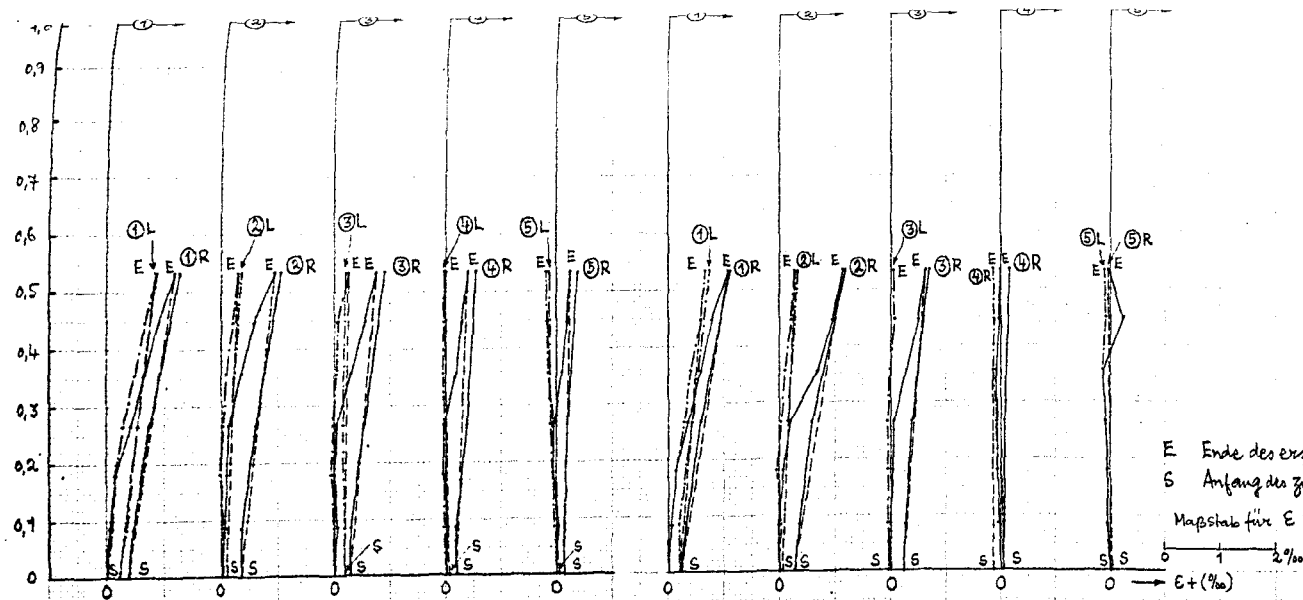
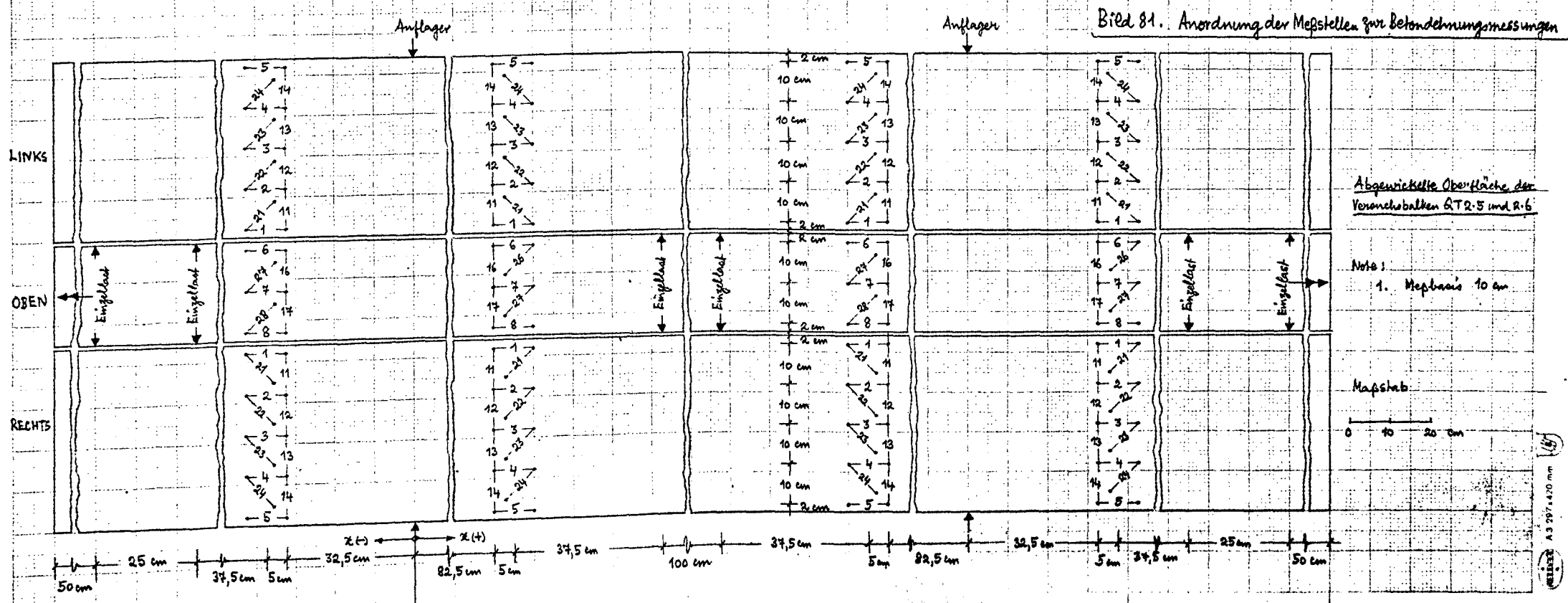
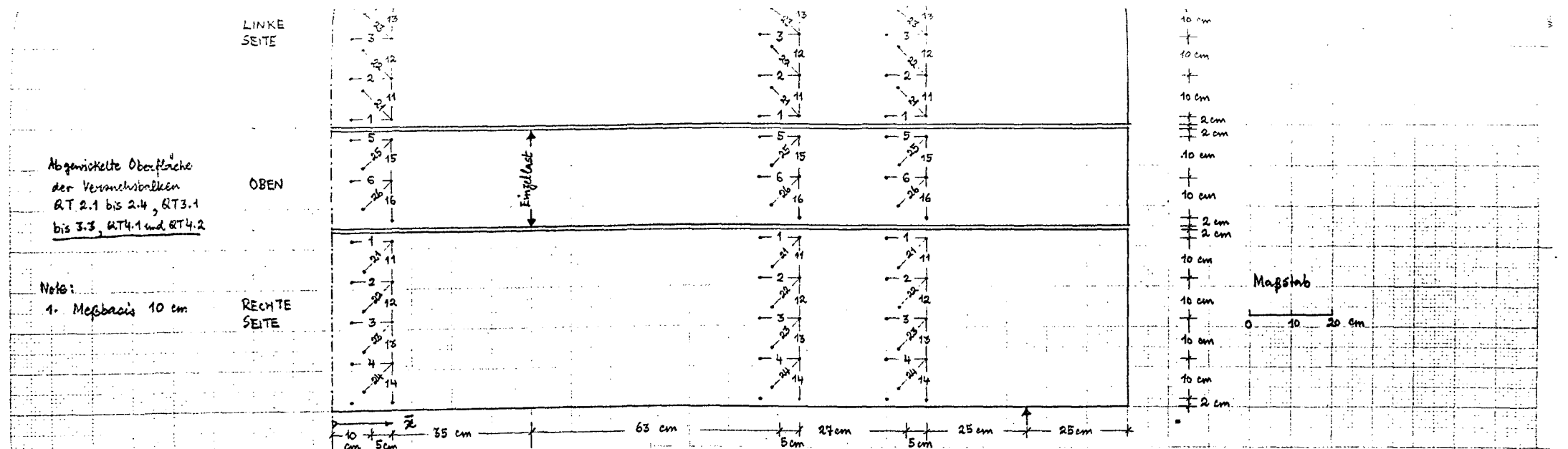


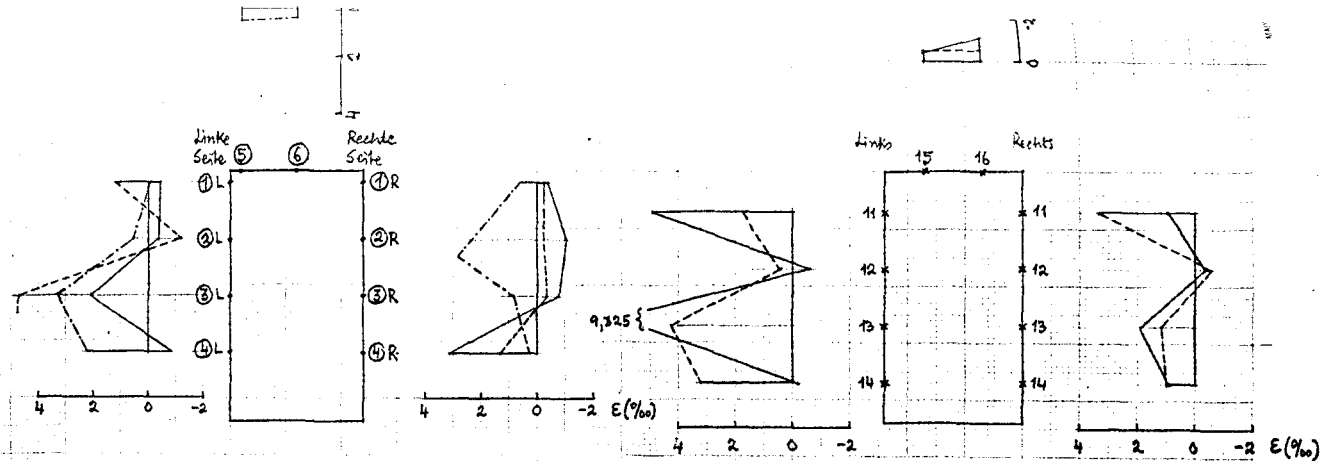
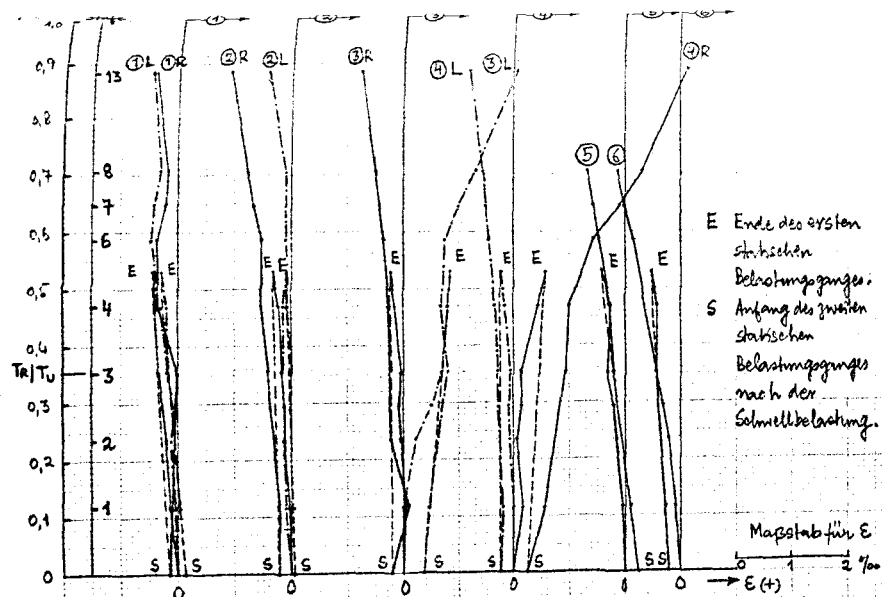
BILD 78: Dehnungen der Längsdehnung bei Balken AT 2.4



QT 2.6: Balken-Draufsicht mit Dehnungsverteilung in Längsrisse bei $T/T_u = 0,533$

BILD 80: Dehnungen der Längsbewehrung bei Balken QT 2.6

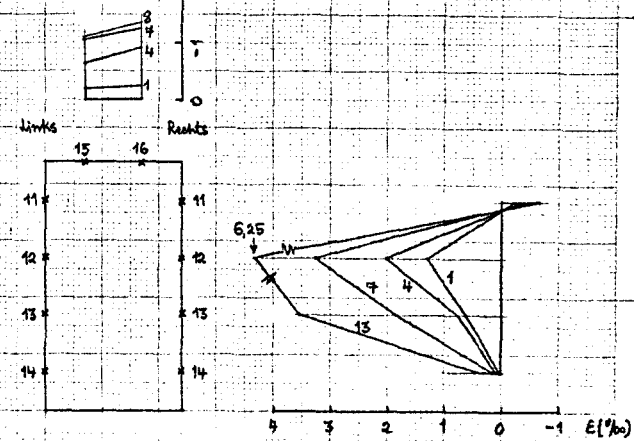
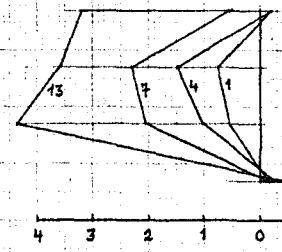
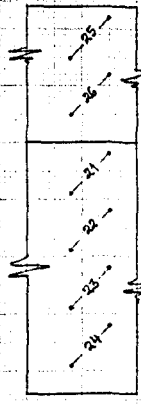
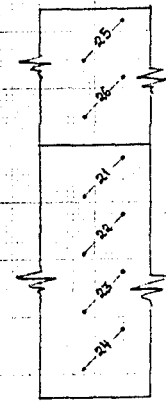
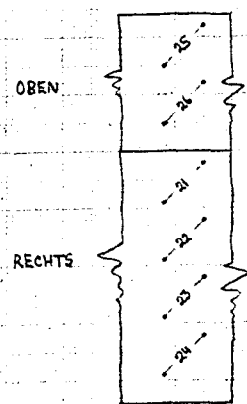
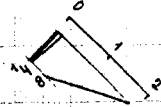




Dehnungsverteilung in den Längsdehnungsmessern bei $T/T_0 = 0.882$
 von Balkenmitte $\bar{x} = 10 \text{ cm}$ ---
 " " " $\bar{x} = 113 \text{ cm}$ ---
 " " " $\bar{x} = 145 \text{ cm}$ ---

Dehnungsverteilung in den Querdehnungsmessern bei $T/T_0 = 0.882$
 von Balkenmitte $\bar{x} = 118 \text{ cm}$ ---
 " " " $\bar{x} = 150 \text{ cm}$ ---

Dehnungen in den Dehnungsmessern unter 45° zur Balkenachse
 (Laststufen nur nach Schnellbelastung)



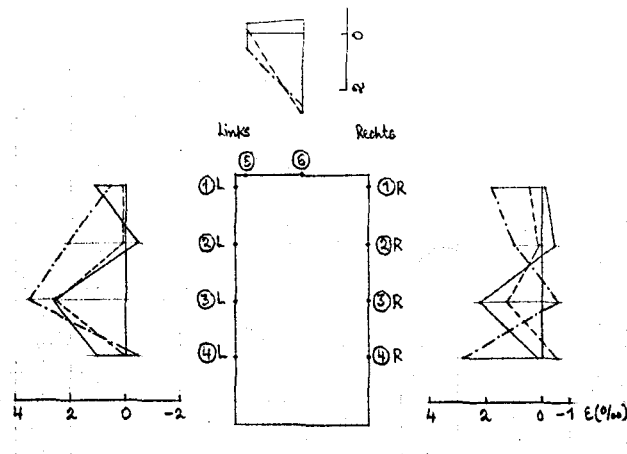
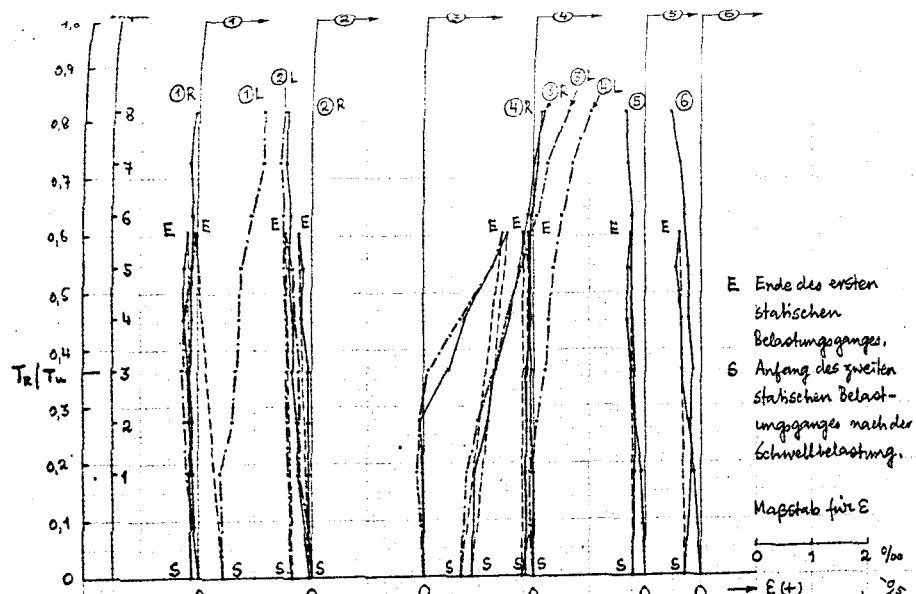
Dehnungsverteilung in den Querdehnungsmessern im Schnitt $\bar{x} = 15 \text{ cm}$ (Querkraftfreier Bereich)
 (Laststufen nur nach der Schnellbelastung)

Der Balkenschnitt
 $\bar{x} = 11.5 \text{ cm}$ von
 Mitte-Balken

Im Balkenschnitt
 $\bar{x} = 114.5 \text{ cm}$ von
 Mitte-Balken

Im Balkenschnitt
 $\bar{x} = 146.5 \text{ cm}$ von
 Mitte-Balken

BILD 82 : Befunde Dehnungen im Versuchsbalken BT 2.2



Dehnungsverteilung in den Längdehnungsmessern bei $T/T_u = 0,818$

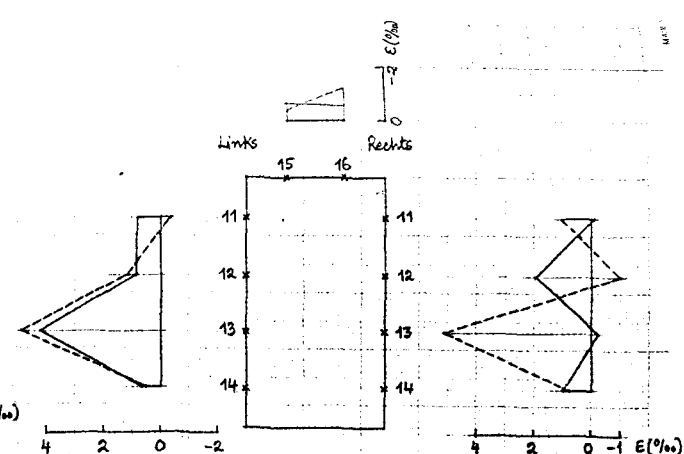
Symbole

Balkenschnitt

$\bar{x} = 10 \text{ cm}$ von Balkenmitte

$\bar{x} = 113 \text{ cm}$ " "

$\bar{x} = 145 \text{ cm}$ " "



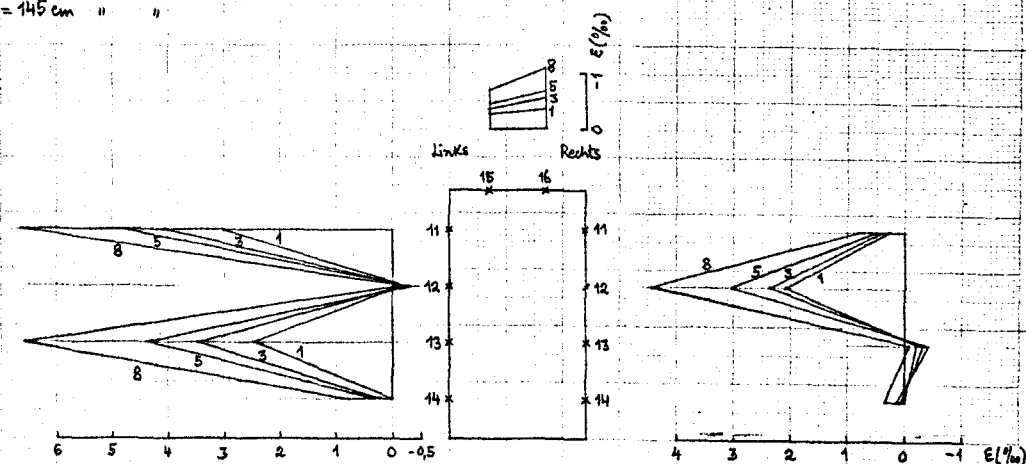
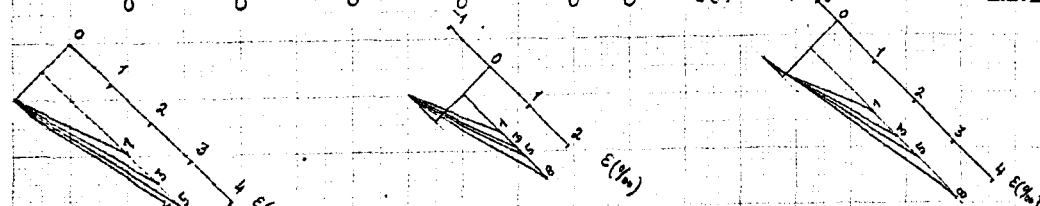
Dehnungsverteilung in den Querdehnungsmessern bei $T/T_u = 0,818$

Symbole

Balkenschnitt

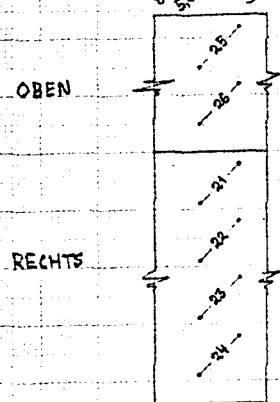
$\bar{x} = 118 \text{ cm}$ von Balkenmitte

$\bar{x} = 150 \text{ cm}$ " "

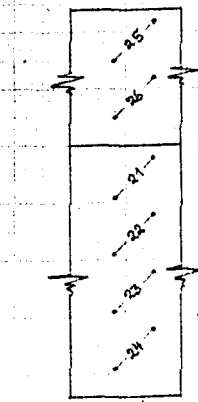


Dehnungsverteilung in den Querdehnungsmessern im Schnitt $\bar{x} = 15 \text{ cm}$ (Querkraftfreier Bereich)

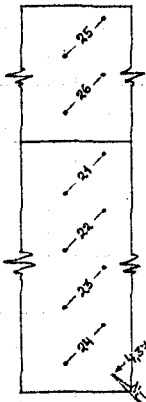
(Laststufen nur nach der Schnellbelastung)



Im Balkenschnitt
 $\bar{x} = 11,5 \text{ cm}$ von
Mitte-Balken



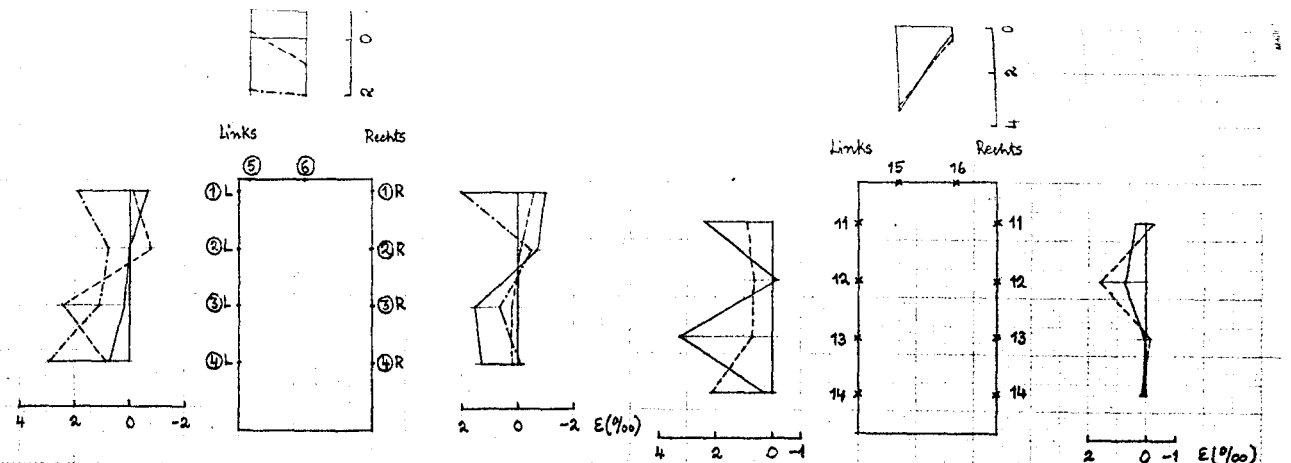
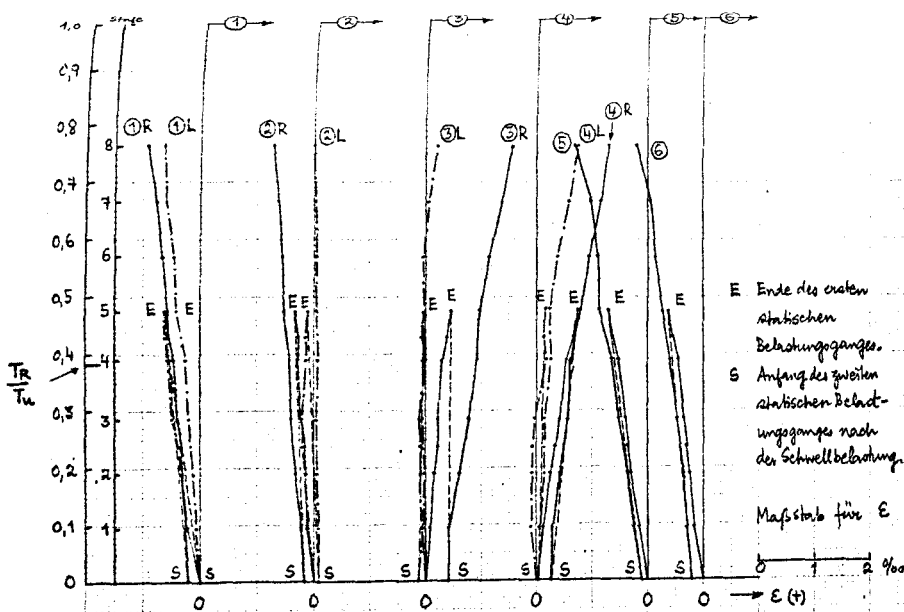
Im Balkenschnitt
 $\bar{x} = 114,5 \text{ cm}$ von
Mitte-Balken



Im Balkenschnitt
 $\bar{x} = 146,5 \text{ cm}$ von
Mitte-Balken

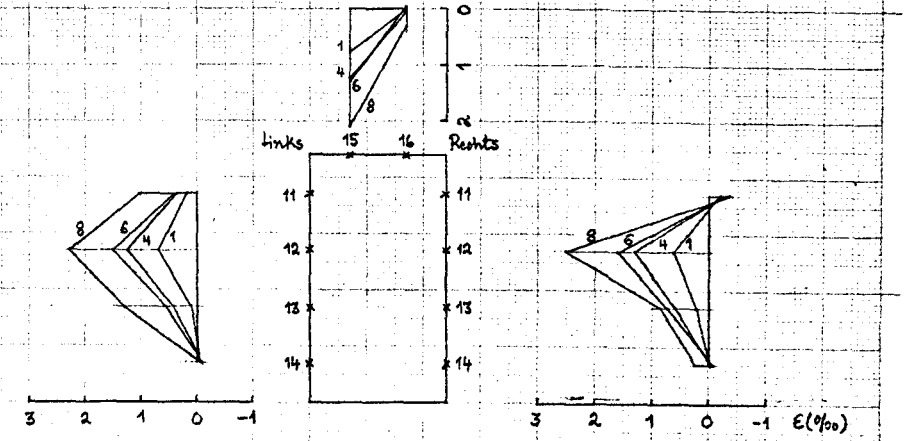
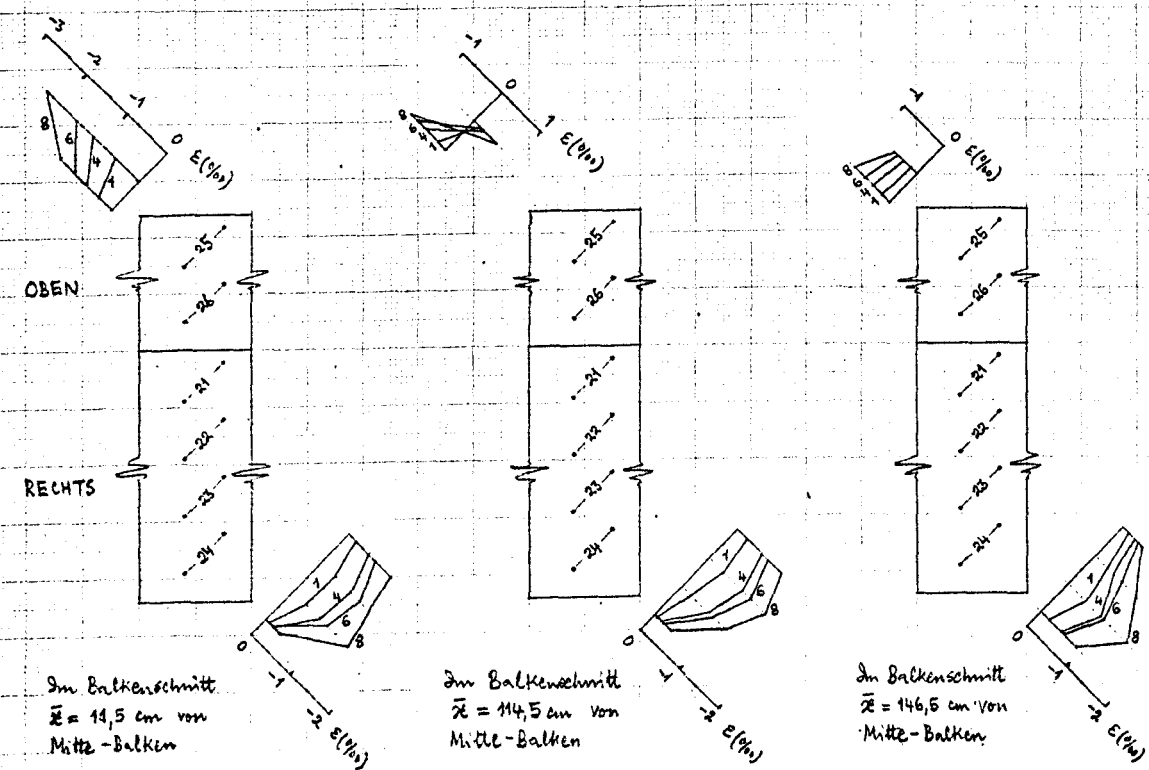
Dehnungen in den Dehnungsmessern unter 45° zur Balkenachse (Laststufen nur nach Schnellbelastung)

BILDB3: Betondehnungen im Versuchsbalken BT 2.3



Dehnungsverteilung in den Längdehnungsmessern bei $T/T_u = 0.762$
 Balkenschnitt
 Symbole
 — $\bar{x} = 10$ cm von Balkenmitte
 - - - $\bar{x} = 113$ cm " "
 ····· $\bar{x} = 145$ cm " "

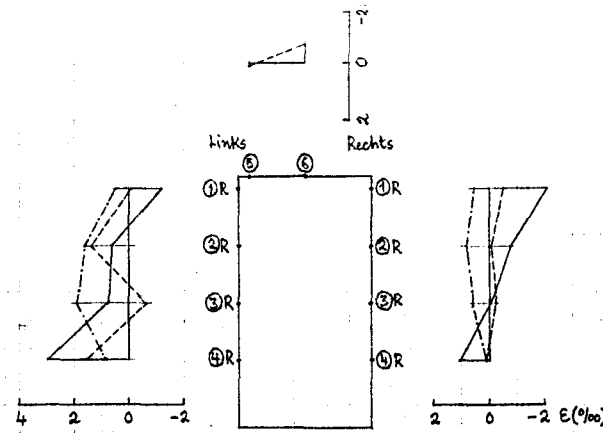
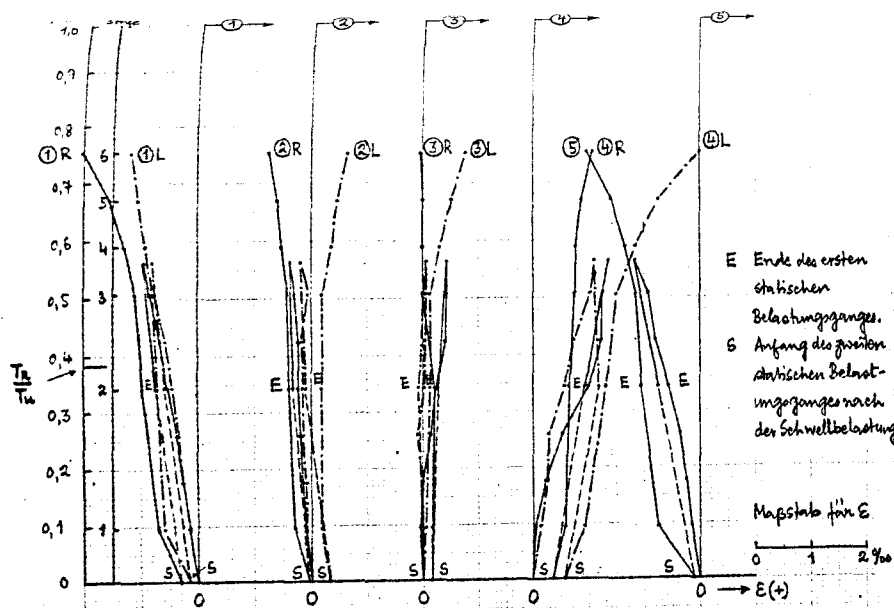
Dehnungsverteilung in den Querdehnungsmessern bei $T/T_u = 0.762$
 Balkenschnitt
 Symbole
 — $\bar{x} = 118$ cm von Balkenmitte
 - - - $\bar{x} = 150$ cm " "
 ····· $\bar{x} = 150$ cm " "



Dehnungsverteilung in den Querdehnungsmessern im Schnitt $\bar{x} = 15$ cm (querkraftfreier Bereich)
 (laststufen nur nach der Schnellbelastung)

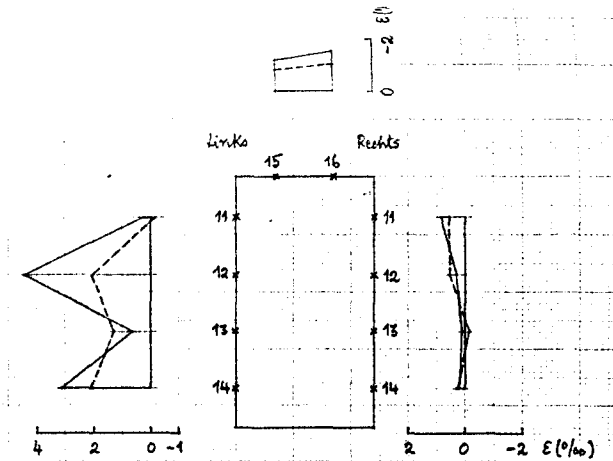
BILD 84: Befrordnungen im Versuchsbalken QT 3.2

Dehnungen in den Dehnungsmessern unter 45° zur Balkenachse (laststufen nur nach Schnellbelastung)



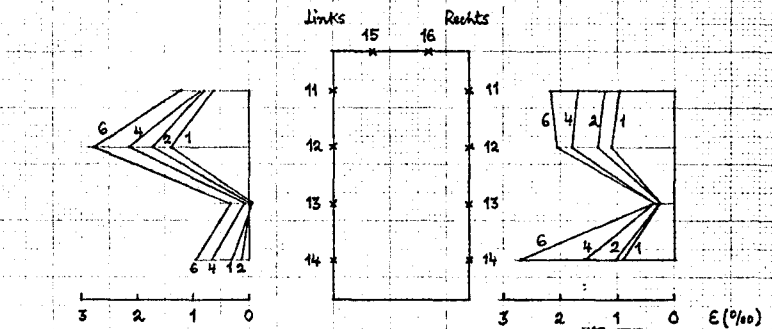
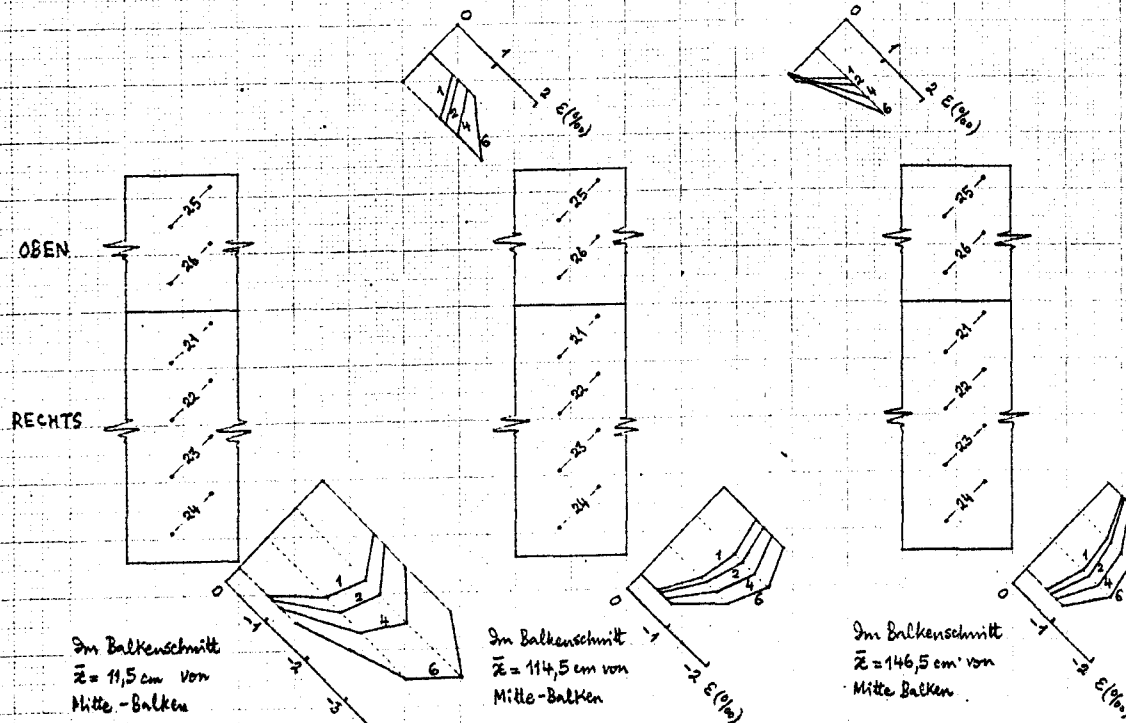
Dehnungsverteilung in den Längsdehnungsmessern bei $T/T_0 = 0.753$

Symbole	Balkenschnitt
—	$\bar{x} = 10$ cm von Balkenmitte
- - -	$\bar{x} = 113$ cm " "
- - -	$\bar{x} = 145$ cm " "



Dehnungsverteilung in den Querschnittsmessern bei $T/T_0 = 0.753$

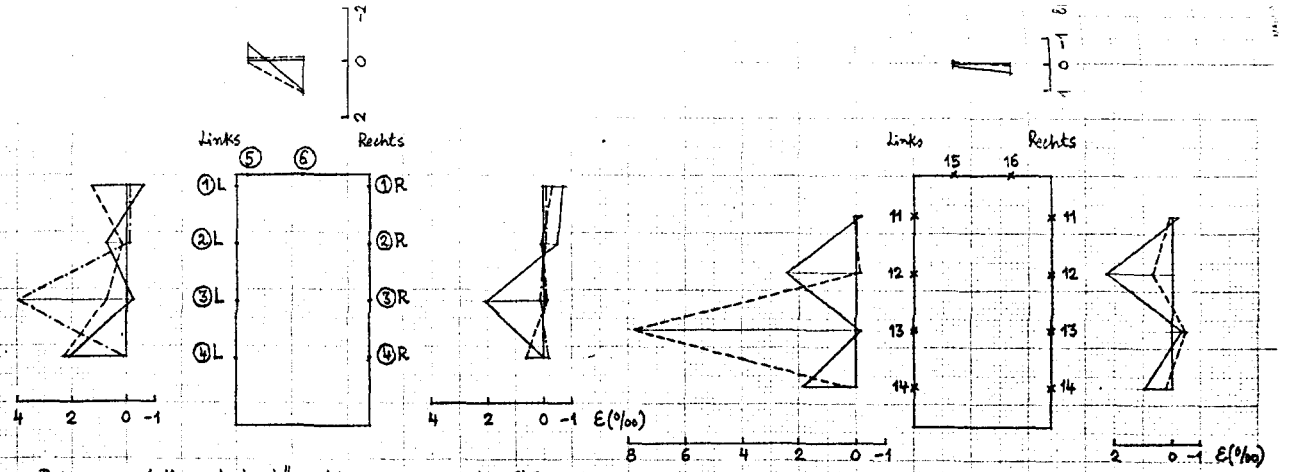
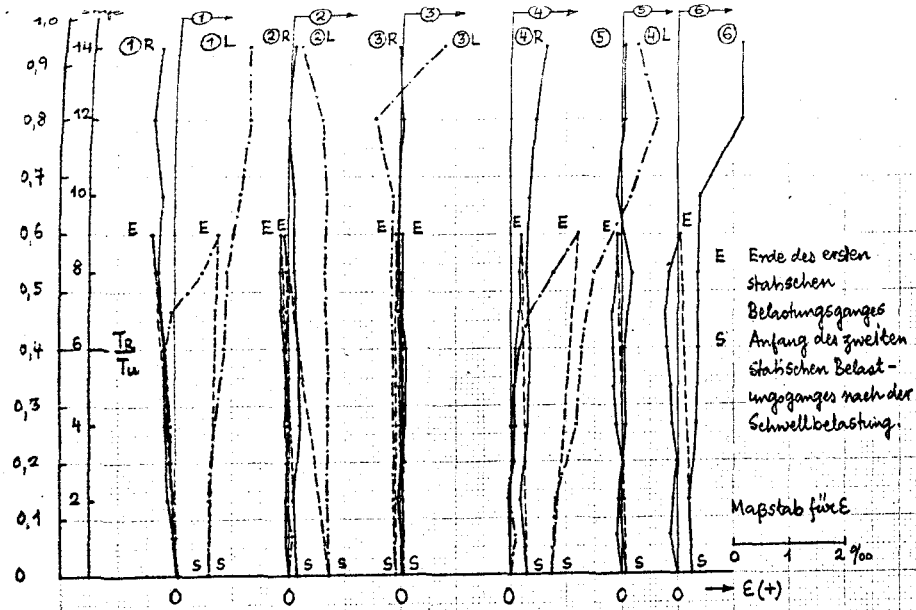
Symbole	Balkenschnitt
—	$\bar{x} = 118$ cm von Balkenmitte
- - -	$\bar{x} = 150$ cm " "



Dehnungsverteilung in den Querschnittsmessern im Schnitt $\bar{x} = 15$ cm (querkraftfreier Bereich)
(Laststufen nur nach der Schwellbelastung)

BILD 86: Betondehnungen in Versuchsbalken 4.1

Dehnungen in den Dehnungsmessern unter 45° zur Balkenachse (Laststufen nur nach Schwellbelastung)

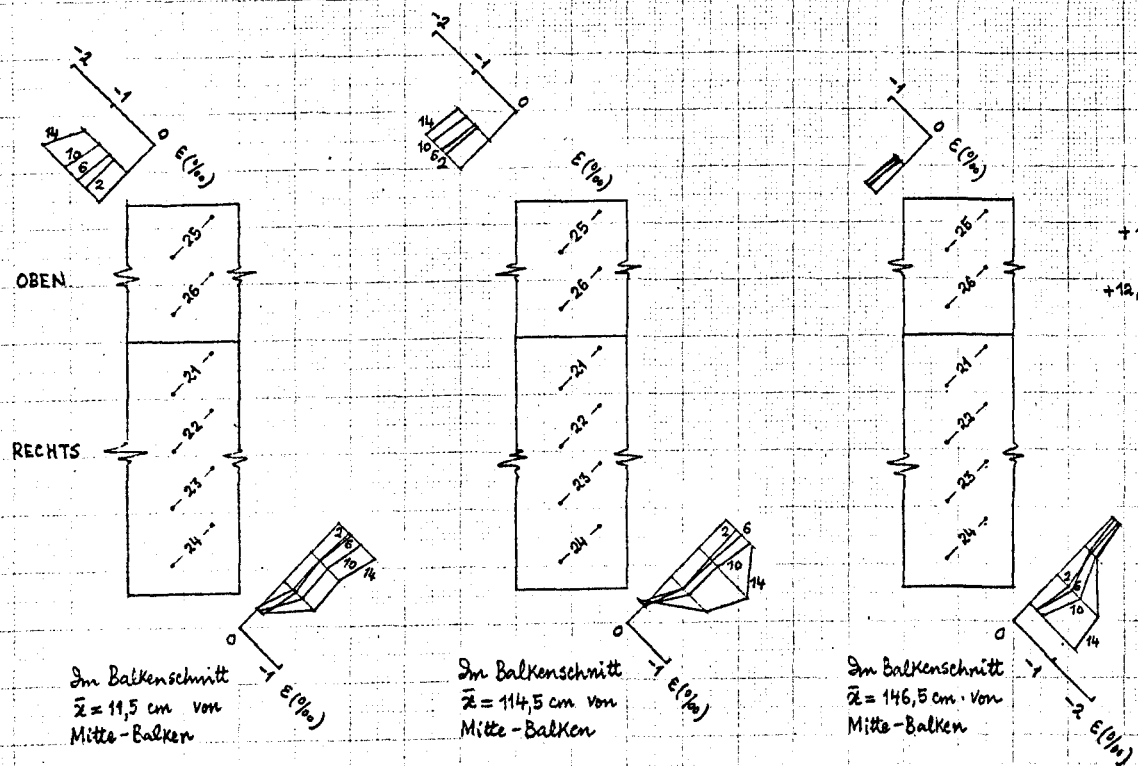


Dehnungsverteilung in den Längdehnungsmessern bei $T/T_u = 0,933$

Symbole
 Balkenschnitt
 $\bar{x} = 10$ cm von Balkenmitte
 $\bar{x} = 113$ cm " "
 $\bar{x} = 145$ cm " "

Dehnungsverteilung in den Querdehnungsmessern bei $T/T_u = 0,933$

Symbole
 Balkenschnitt
 $\bar{x} = 15$ cm von Balkenmitte
 $\bar{x} = 150$ cm " "

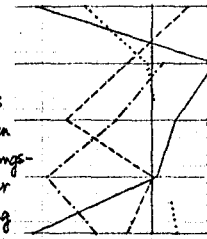
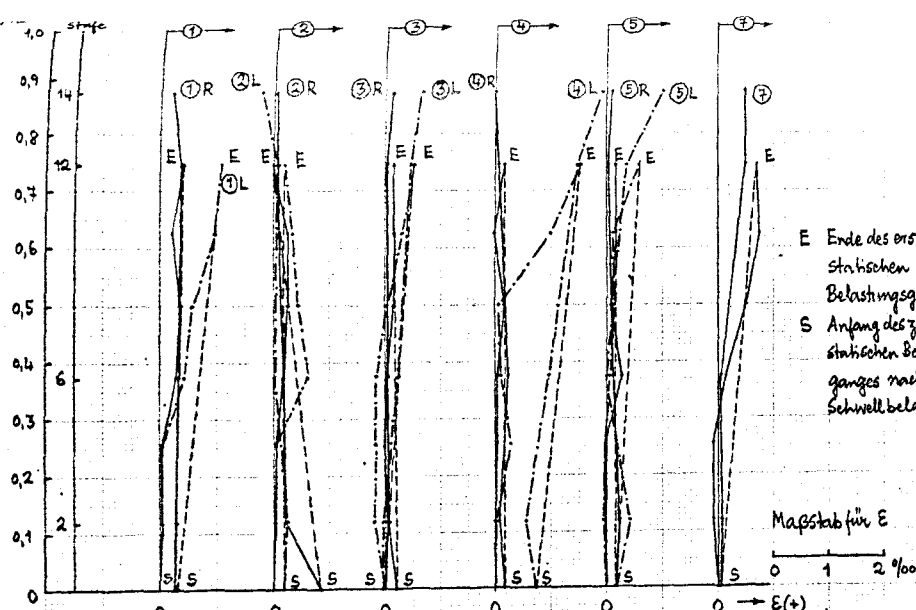


Dehnungen in den Dehnungsmessern unter 45° zur Balkenachse (Laststufen nur nach Schnellbelastung)

Dehnungsverteilung in den Querdehnungsmessern im Schnitt $\bar{x} = 118$ cm (Querkraftbereich)

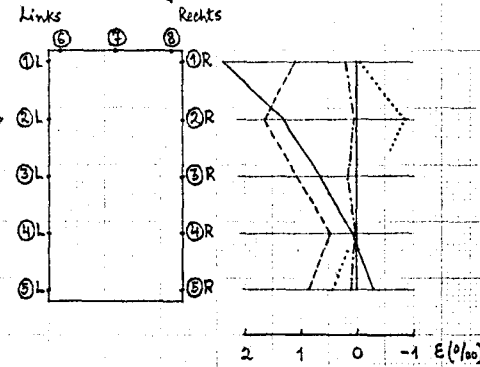
(Laststufen nur nach der Schnellbelastung)

BILD 88. Betondehnungen in Versuchsbalken GT 2.4

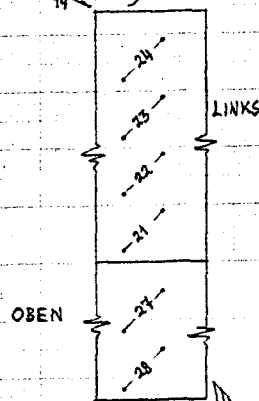
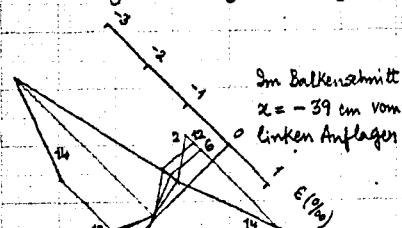


Dehnungsverteilung in den Längsdehnungsmessern bei $T/T_u = 0,873$

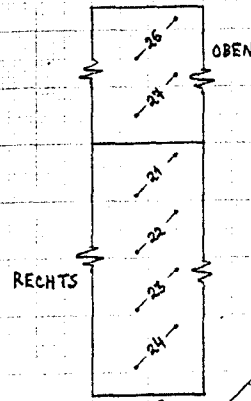
Symbole	Balkenschnitt
—	$x = -37,5$ cm vom linken Auflager
- - -	$x = 87,5$ cm " "
- · - · -	$x = 262,5$ cm " "
· · · · ·	$x = 387,5$ cm " "



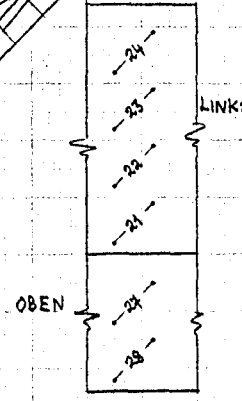
Note: 1. $T_u = 2,25$ Mpm (1. Branch)



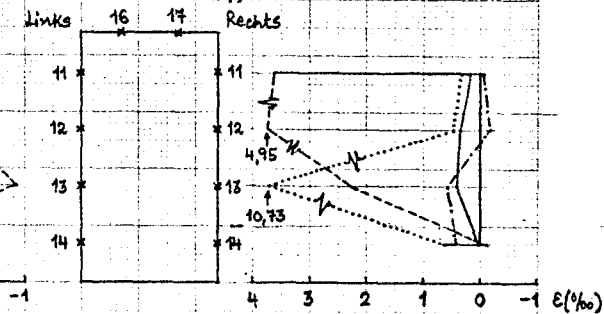
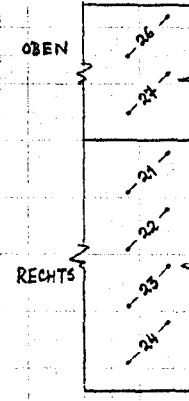
Im Balkenschnitt $x = 89$ cm vom linken Auflager



Im Balkenschnitt $x = 261$ cm vom linken Auflager



Im Balkenschnitt $x = 389$ cm vom linken Auflager

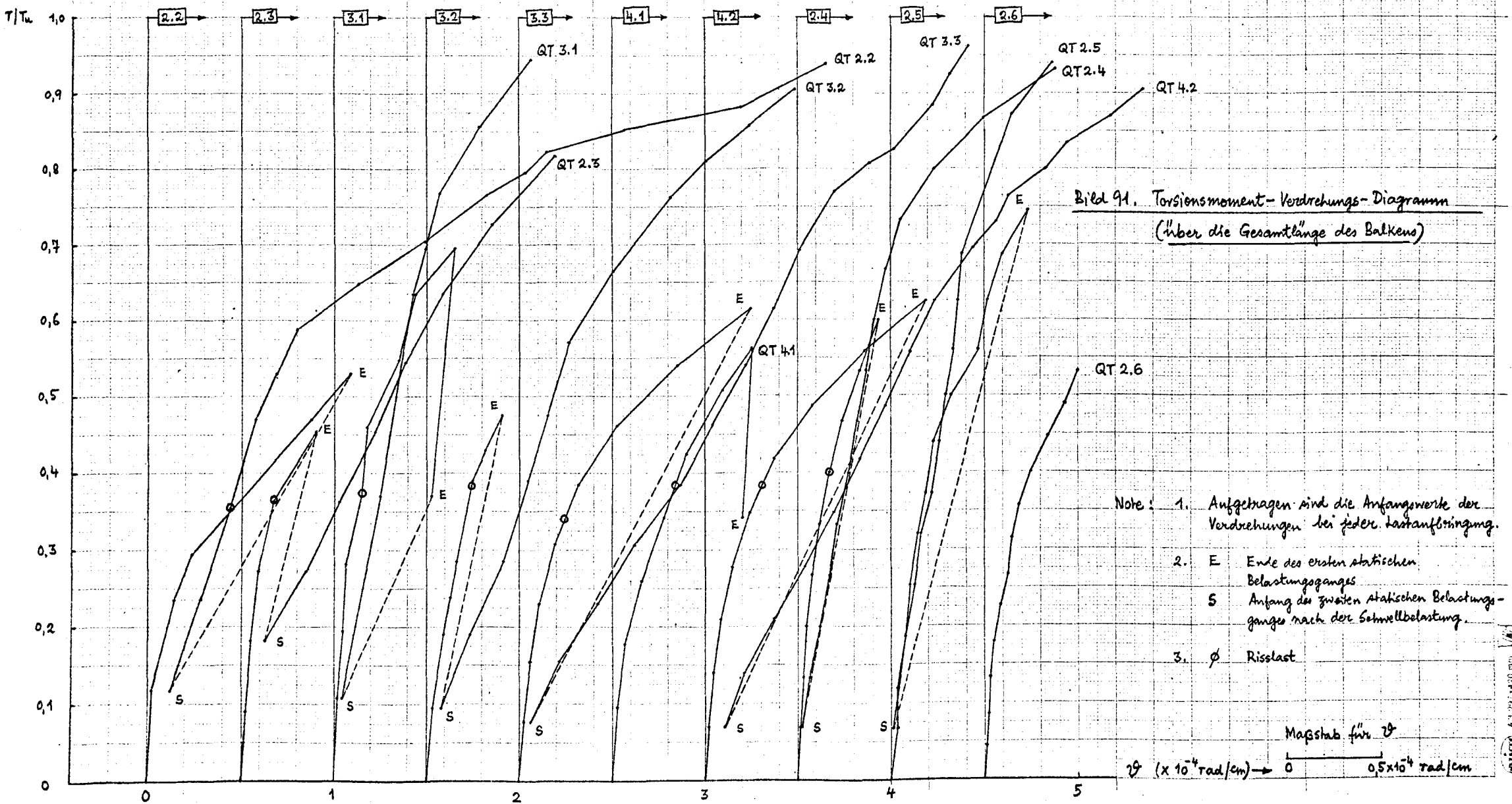


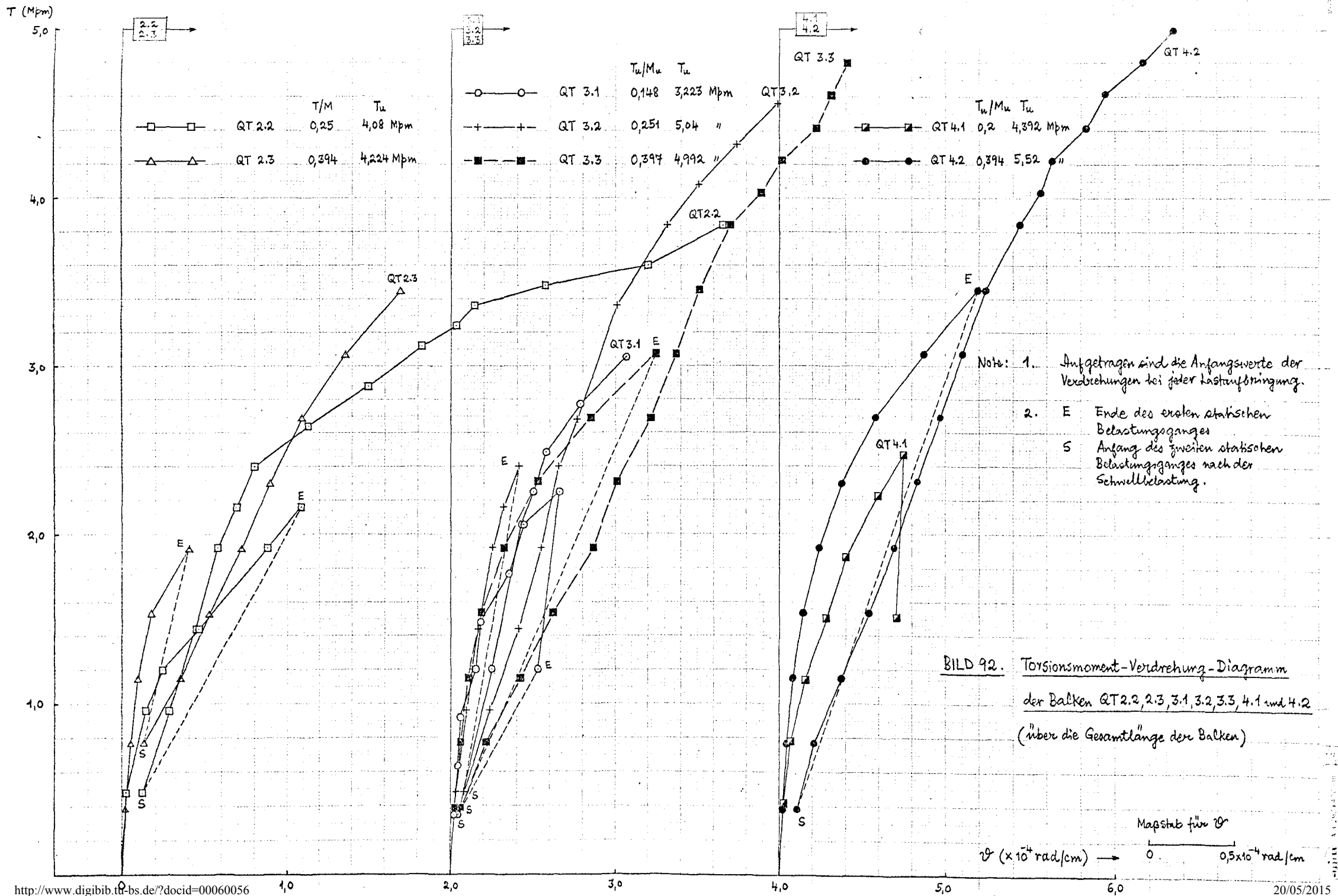
Dehnungsverteilung in den Querdehnungsmessern bei $T/T_u = 0,873$

Symbole	Balkenschnitt
—	$x = -32,5$ cm vom linken Auflager
- - -	$x = 82,5$ cm " "
- · - · -	$x = 267,5$ cm " "
· · · · ·	$x = 382,5$ cm " "

Dehnungen in den Dehnungsmessern unter 45° zur Balkenachse (Laststufen nur nach Schnellbelastung)

Bild 89. Beton dehnungen in Versuchsbalken QT 2.5

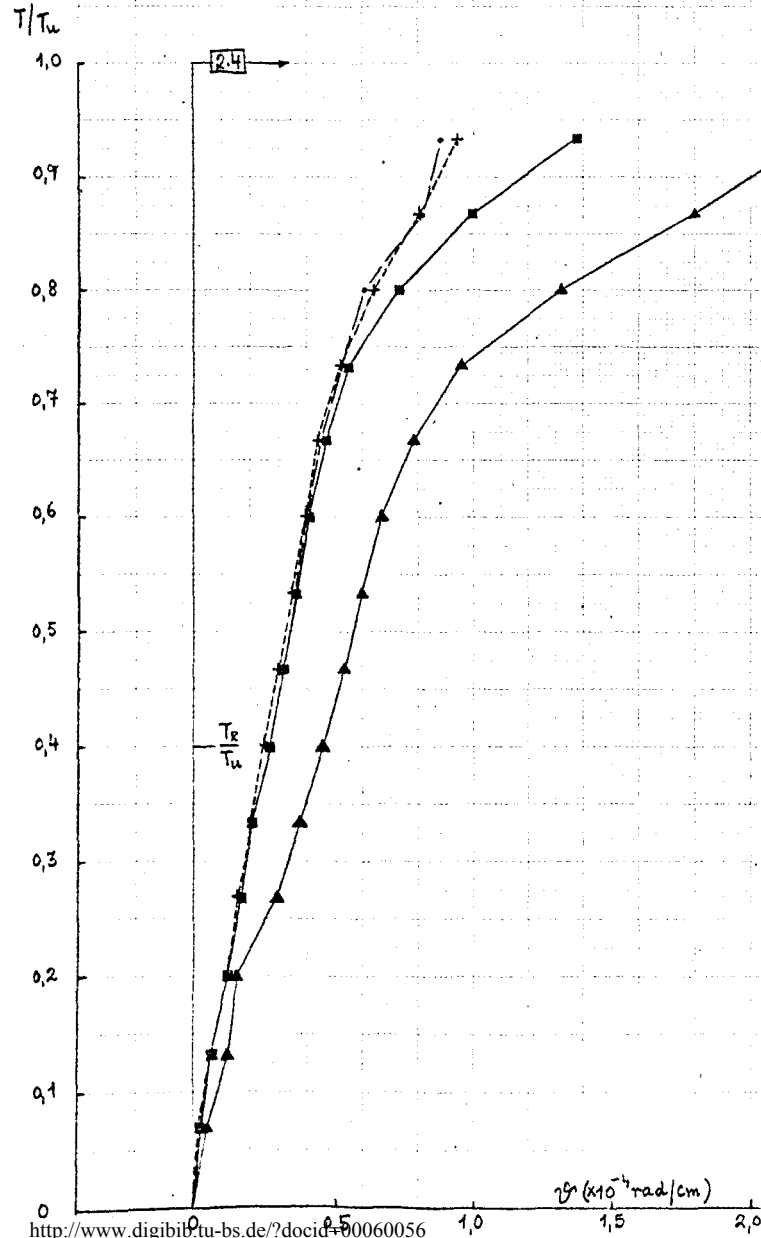




Versuchsbalken QT 2.4

- Über die gesamte Länge des Balkens
- In Balkenmitte; Nur T+M ($T_u/M_u = 0,25$)
- ▲— Vom Auflager 73,8 cm; T+M+Q ($T_u/M_u = 0,423$
 $T_u/Q_{ub} = 1,30$)
- +— Vom Auflager 48,6 cm; T+M+Q ($T_u/M_u = 0,641$
 $T_u/Q_{ub} = 1,30$)

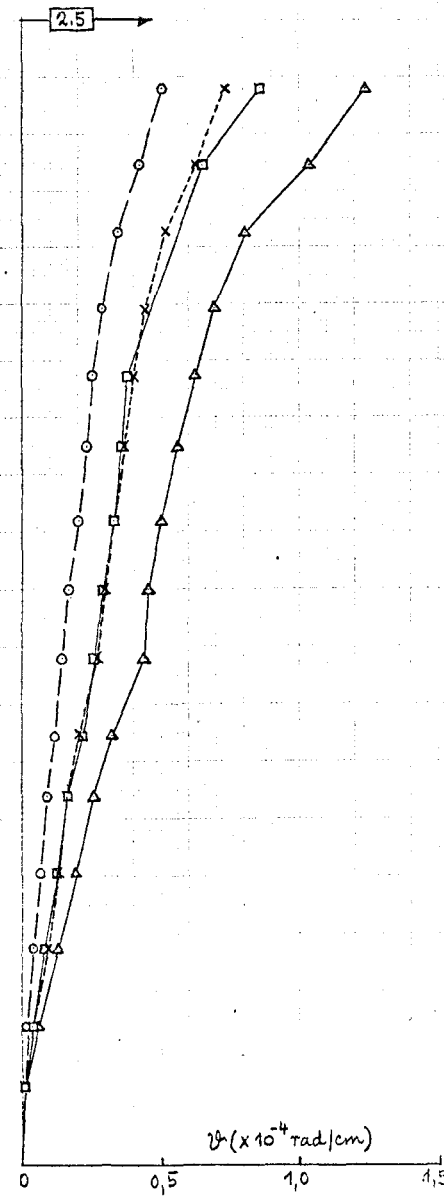
$T_u = 3,6 \text{ Mpm}$



Versuchsbalken QT 2.5

- Über die gesamte Länge des Balkens
- In Balkenmitte; Nur T+M ($T_u/M_u = 0,256$)
- △— Vom Auflager 70 cm; T+M+Q; Werte gemittelt aus den zwei Balkenhälften; ($T_u/M_u = 0,37$; $T_u/Q_{ub} = 0,389$)
- x— Am Auflager; T+M+Q; Werte gemittelt aus den zwei Balkenhälften; ($T_u/M_u = 0,121$; $T_u/Q_{ub} = 0,386$)

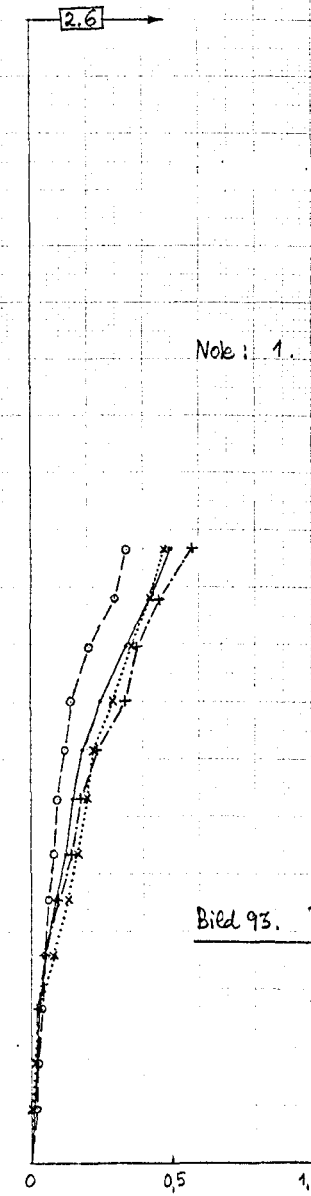
$T_u = 2,25 \text{ Mpm (1. Bruch)}$



Versuchsbalken QT 2.6

- Über die Gesamtlänge des Balkens
- In Balkenmitte; Nur T+M ($T_u/M_u = 1,0$)
- +— Vom Auflager 70 cm; T+M+Q; Werte gemittelt aus den zwei Balkenhälften; ($T_u/M_u = 0,591$; $T_u/Q_{ub} = 0,862$)
- x— Am Auflager; T+M+Q; Werte gemittelt aus den zwei Balkenhälften; ($T_u/M_u = 0,222$; $T_u/Q_{ub} = 0,85$)

$T_u = 3,15 \text{ Mpm (1. Bruch)}$



Note: 1. Aufgetragen sind die Anfangswerte der Verdrehungen bei jeder Lastanbringung.

Bild 93. Torsionsmoment-Verdrehungs-Diagramm
Versuchsbalken QT 2.4, 2.5 und 2.6

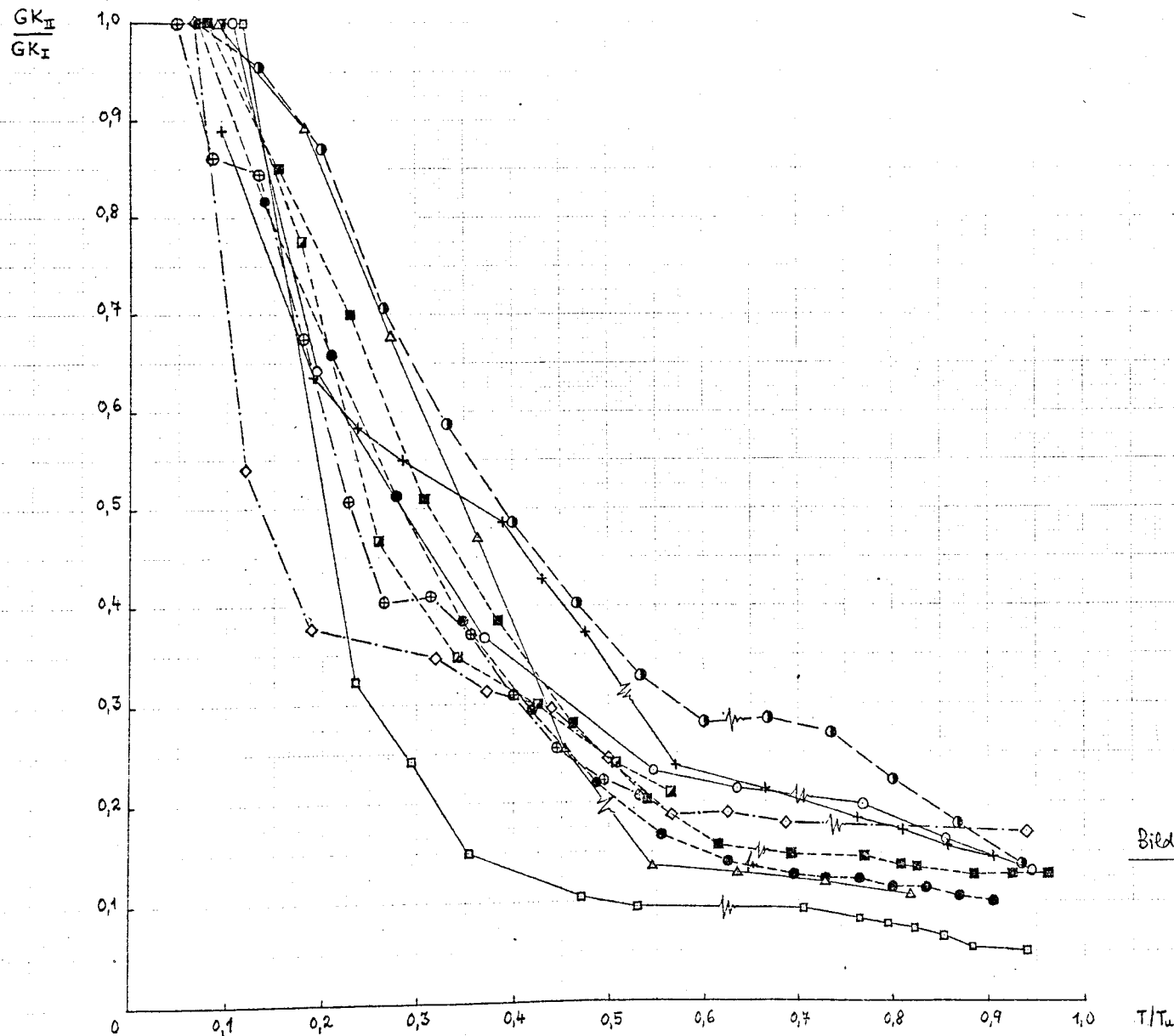
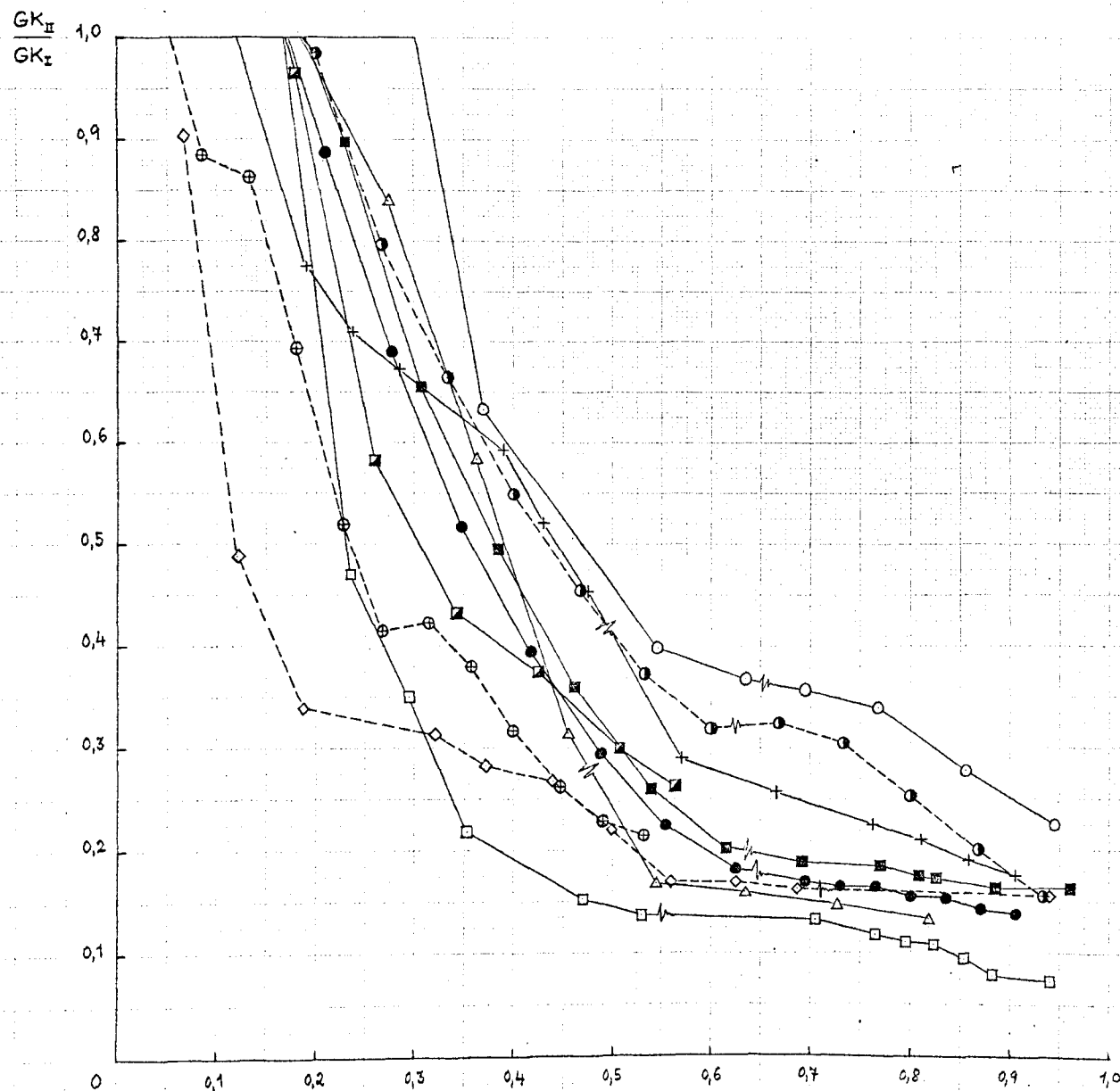


Bild 94. Torsionssteifigkeit "über die Gesamtlänge der Versuchsbalken"
(Anfangssteifigkeit GK_I nach Versuch)



$$GK_{II} = 0,219 b^3 d G_b = 0,0952 b^3 d E_b$$

(E_b = Sekantenmodul des Betons = $2,3 G_b$)

		GK_{II} rechnerisch	T_u
□	QT 2.2	$14,5 \times 10^9 \text{ Kpc}^2$	4,08 Mpm
△	QT 2.3	$15,35 \times 10^9$	4,224 "
○	QT 3.1	$12,70 \times 10^9$	3,233 "
+	QT 3.2	$12,98 \times 10^9$	5,04 "
■	QT 3.3	$12,16 \times 10^9$	4,992 "
▣	QT 4.1	$12,5 \times 10^9$	4,392 "
●	QT 4.2	$15,58 \times 10^9$	5,52 "
⊙	QT 2.4	$15,64 \times 10^9$	3,60 "
◇	QT 2.5	$15,93 \times 10^9$	2,25 "
⊕	QT 2.6	$15,97 \times 10^9$	3,15 "

—●— Schnellbelastung in diesem Bereich !

Bild 95. Torsionssteifigkeit "über die Gesamtlänge der Versuchsbalken"
(Anfangssteifigkeit GK_{II} rechnerisch ermittelt)

$$\frac{GK_{II}}{GK_I}$$

1,0

0,9

0,8

0,7

0,6

0,5

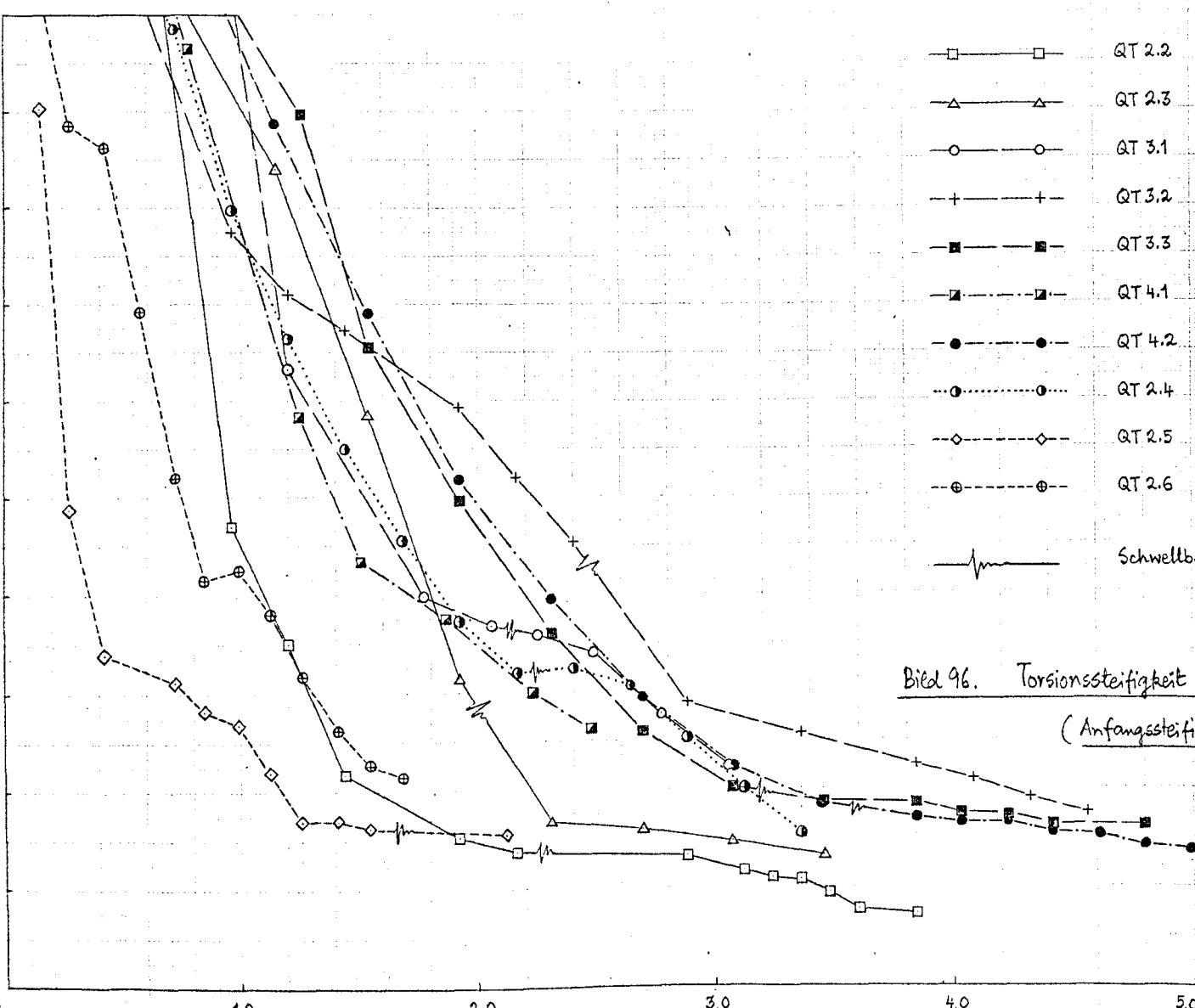
0,4

0,3

0,2

0,1

0



$$GK_I = 0,0952 b^3 d E_b$$

		GK_I rechnerisch	T_u	T_u/M_u
□	QT 2.2	$14,5 \times 10^9 \text{ Kpc}^2$	4,08 Mpm	0,25
△	QT 2.3	$15,35 \times 10^9$	4,224 "	0,394
○	QT 3.1	$12,70 \times 10^9$	3,233 "	0,148
+	QT 3.2	$12,98 \times 10^9$	5,04 "	0,251
■	QT 3.3	$12,16 \times 10^9$	4,992 "	0,397
▣	QT 4.1	$12,5 \times 10^9$	4,392 "	0,2
●	QT 4.2	$15,58 \times 10^9$	5,52 "	0,394
⊙	QT 2.4	$15,64 \times 10^9$	3,60 "	0,249
◇	QT 2.5	$15,93 \times 10^9$	2,25 "	—
⊕	QT 2.6	$15,94 \times 10^9$	3,15 "	—

Schwellbelastung in diesem Bereich !

Bild 96. Torsionssteifigkeit über die Gesamtlänge der Versuchsbalken.
(Anfangssteifigkeit GK_I rechnerisch ermittelt)

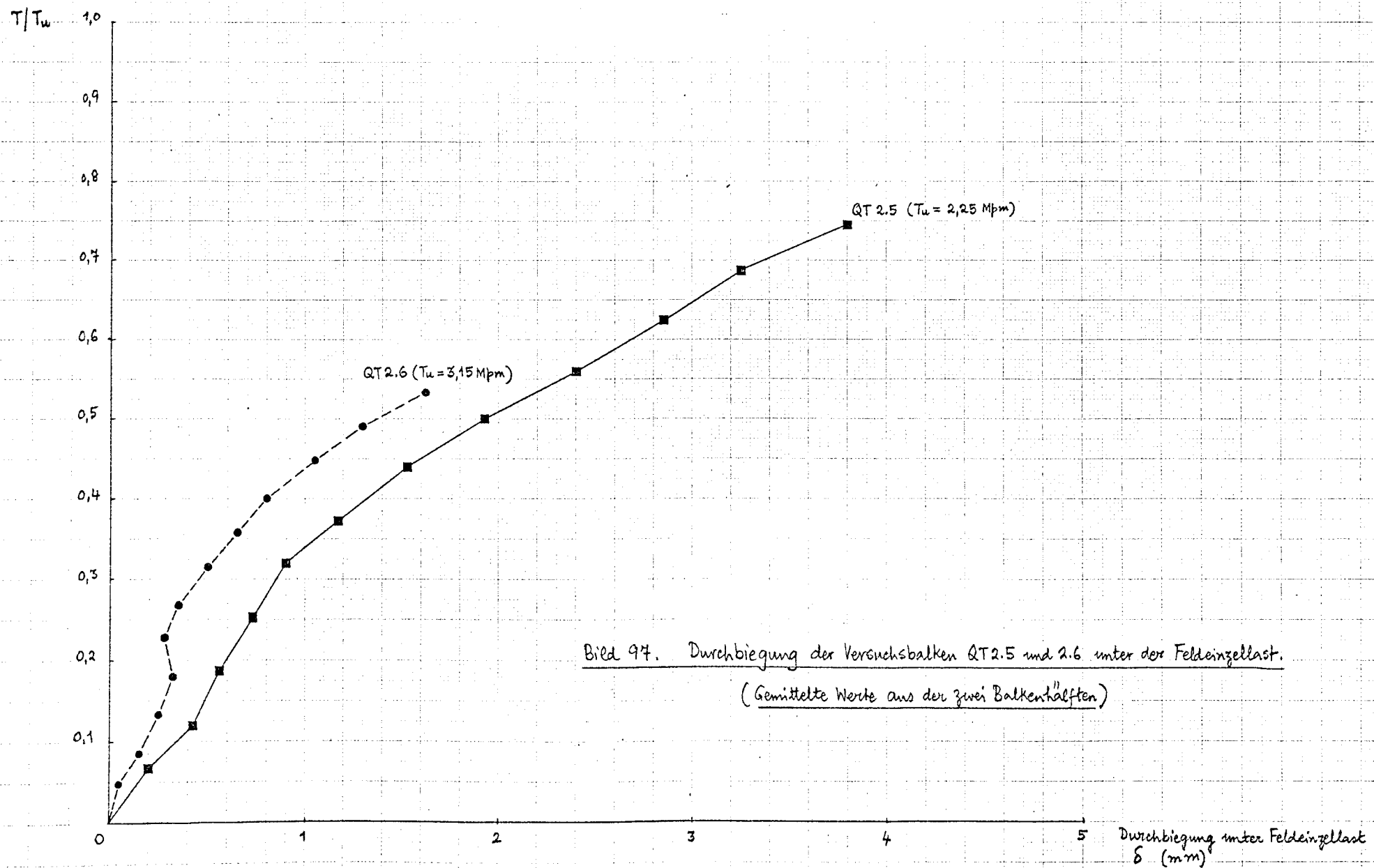


Bild 97. Durchbiegung der Versuchsbalken QT 2.5 und 2.6 unter der Feldeinzellast.
(Gemittelte Werte aus der zwei Balkenhälften)